Économie Industrielle de l'Environnement
M2 E2D2
Applications - Série 1

Lionel Richefort
Université de Nantes

1 Jeux avec des préférences quadratiques

On considère un jeu simultané à n joueurs. La stratégie d'un joueur i est notée x_i et l'ensemble de ses stratégies est $\{x_i \mid x_i \geq 0\}$. Sa fonction de règlements est *quadratique*. Elle s'écrit :

$$U^i(x_1, ..., x_n) = x_i \left(\alpha - \beta x_i + \gamma \sum_{j:j \neq i} x_j \right) \qquad \alpha > 0,\ \beta \geq |\gamma| > 0.$$

1.1. Déterminer les meilleures réponses, en stratégies pures, des n joueurs. Commentaires.
1.2. Résoudre ce jeu lorsque $n = 2$ et $\gamma = -\beta < 0$. Donner une représentation graphique qui illustre l'inefficience de l'équilibre. Commentaires.
1.3. Résoudre ce jeu lorsque $n = 2$ et $\beta > \gamma > 0$. Donner une représentation graphique qui illustre l'inefficience de l'équilibre. Commentaires.
1.4. Dans chaque cas, proposer un outil permettant de restaurer l'optimum social.

2 Jeux avec des préférences log/linéaires

On considère un jeu simultané à $n = 2$ joueurs. La stratégie d'un joueur i est notée x_i et l'ensemble de ses stratégies est $\{x_i \mid x_i \geq 0\}$. Sa fonction de règlements est *log/linéaire*. Elle s'écrit :

$$U^i(x_1, ..., x_n) = \ln \left(\theta x_i + \phi \sum_{j:j \neq i} x_j \right) - \eta x_i \qquad \eta > 0,\ \theta \geq |\phi| > 0.$$

2.1. Déterminer les meilleures réponses, en stratégies pures, des n joueurs. Commentaires.
2.2. Résoudre ce jeu lorsque $n = 2$ et $\phi > 0$. Donner une représentation graphique qui illustre l'inefficience de l'équilibre. Commentaires.
2.3. Résoudre ce jeu lorsque $n = 2$ et $\phi < 0$. Donner une représentation graphique qui illustre l'inefficience de l'équilibre. Commentaires.
2.4. Dans chaque cas, proposer un outil permettant de restaurer l'optimum social.

3 Représentation des jeux sous forme de graphe

On considère un jeu simultané à $n = 4$ joueurs. La stratégie d'un joueur i est notée x_i et l'ensemble de ses stratégies est $\{x_i \mid x_i \geq 0\}$. Les joueurs sont organisés en réseau, que nous représentons comme un graphe dirigé pondéré G qui consiste d'un ensemble de nœuds (les joueurs), d'un ensemble d'arcs (les liens dirigés entre les joueurs) et d'une application de l'ensemble des arcs vers un ensemble de poids positifs (les intensités des liens dirigés). On note ij un lien dirigé de i vers j. La représentation matricielle de G est donnée par sa matrice d'adjacence pondérée $\mathbf{\Omega} = [\omega_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ où $\omega_{ij} > 0$ si ij est un arc et $\omega_{ij} = 0$ sinon (par convention, on suppose que $\omega ii = 0$). La fonction de règlements d'un joueur i est *quasi-linéaire*. Elle s'écrit :

$$U^i(\mathbf{x}) = b_i x_i - q_i \left(x_i + \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j \right)$$

où $b_i > 0$, et q_i est défini sur $\mathbb{R}_+$ avec $q_i' > 0$ et $q_i'' > 0$.

3.1. Interpréter ce modèle.
3.2. Représenter G et donner sa matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega}$ lorsque $\omega_{ij} = 1$ pour tout i, pour tout $j \neq i$. Commentaires.
3.3. Représenter G et donner sa matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega}$ lorsque $\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{34} = 1$ et $\omega_{ij} = 0$ sinon. Commentaires.
3.4. Représenter G et donner sa matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega}$ lorsque $\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{41} > 0$ et $\omega_{ij} = 0$ sinon. Commentaires.
3.5. Représenter G et donner sa matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega}$ lorsque $\omega_{12} = 1/2$, $\omega_{13} = 1/3$, $\omega_{14} = 1/4$ et $\omega_{ij} = 0$ sinon. Commentaires.