Economie industrielle de l'environnement

I. Les jeux non-coopératifs de partage de l'eau

Lionel Richefort

Université de Nantes, LEMNA

Plan du chapitre

Lectures :

- Bramoullé Y., Kranton R. et D'Amours M. (à paraître), " Strategic Interactions and Networks ", *American Economic Review*.
- Ilkiliç R. (2011), " Networks of Common Property Resources ", *Economic Theory*, 47(1), 105-134.
- Jackson M.O. (2010), *Social and Economics Networks*, Princeton University Press (voir chapitre 9).

La centralité dans un réseau

- En théorie des graphes, la **centralité** d'un nœud mesure son importance relative au sein du graphe.
  - $\rightarrow$ En économie des réseaux, cela reflèterait l'**influence** d'un individu (nœud) au sein du réseau ;
- Il existe quatre mesures principales de centralité (cf. Freeman, 1979) :
  - le *degré* de centralité (l'importance d'un individu dépend du nombre total d'individus avec lesquels il est directement connecté) ;
  - la centralité de *proximité* (un individu occupe une position avantageuse s'il est globalement proche des autres individus) ;
  - la centralité d'*intermédiarité* (un individu est d'autant plus important s'il est nécessaire de le “ traverser ” pour aller d'un individu quelconque à un autre) ;
  - la centralité *spectrale* (la centralité d'un individu est déterminée par la centralité des individus auxquels il est connecté).

La mesure de Bonacich

- Dans ce chapitre, nous utiliserons une extension de la centralité spectrale (qui est elle-même une extension du degré), appelée centralité de Katz-Bonacich.

Définition (Katz, 1953 ; Bonacich, 1987)

Pour une matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}_{+}^{n \times n}$, la centralité de Katz-Bonacich est donnée par

$$\mathbf{c}\left(\alpha, \beta\right) = \alpha \left(\mathbf{I} - \beta \mathbf{\Omega}\right)^{-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{1},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux scalaires.

→ On constate que le paramètre α n'affecte que la longueur du vecteur $\mathbf{c}(\alpha, \beta)$. Dans ce qui suit, on pose $\alpha = 1$.

→ L'interprétation de la mesure dépend donc surtout du paramètre β.

Interprétation générale

- Si $|\beta|$ est suffisamment petit, alors :

$$\mathbf{c}\,(1,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \mathbf{\Omega}^{k+1}\mathbf{1} = \mathbf{\Omega 1} + \beta\mathbf{\Omega}^2\mathbf{1} + \beta^2\mathbf{\Omega}^3\mathbf{1} + ...$$

→ La mesure de Katz-Bonacich d'un individu correspond à la somme des **chemins** (directs et indirects) sortant de *i*, où le poids de chaque chemin est inversement proportionnel à sa longueur.

→ L'interprétation économique de la mesure dépend du signe de β (si $\beta = 0$, alors $\mathbf{c}(1,\beta) = \mathbf{c}(1,0) = \mathbf{\Omega 1}$, ie. la mesure de Katz-Bonacich est égale au degré).

Interprétation économique : β positif

- Posons $\beta = 0.5$. On obtient :

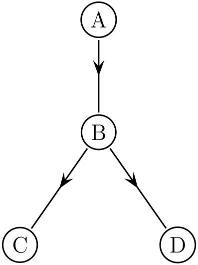
$$\mathbf{c}\,(1, 0.5) = \mathbf{\Omega 1} + 0.5\mathbf{\Omega}^2\mathbf{1} + 0.25\mathbf{\Omega}^3\mathbf{1} + 0.125\mathbf{\Omega}^4\mathbf{1} + ...$$

$\rightarrow$ Dans ce cas, la mesure de Katz-Bonacich s'interprète comme le nombre espéré de **communications** ou d'**influences** causées directement ou indirectement par chaque individu.

$\rightarrow$ La grandeur de β reflèterait alors le degré de transmission (locale ou globale) de l'autorité ou de la communication au sein du réseau.

- De petites valeurs de β accordent un poids important à la structure locale.
- Des valeurs plus grandes de β prennent plus en compte la position des individus dans la structure dans son ensemble.

Exemple



β	A	B	C	D
0	1	2	0	0
0.2	1.4	2	0	0
0.4	1.8	2	0	0
0.6	2.2	2	0	0
0.8	2.4	2	0	0

FIGURE: Hiérarchie asymmétrique (non pondérée) à 3 niveaux, où A a un subordonné, B, deux subordonnés, et C et D, aucun subordonné. Le tableau donne les centralités de Katz-Bonacich lorsque $\alpha = 1$. Pour de petites valeurs de β, la position B, qui a le plus de subordonnés, est la plus centrale. A partir de $\beta = 0.5$, la position A devient la plus centrale et son avance augmente à mesure que β augmente.

Interprétation économique : β négatif

- Posons $\beta = -0.5$. Il vient :

$$\mathbf{c}\,(1,-0.5) = \mathbf{\Omega 1} - 0.5\mathbf{\Omega}^2\mathbf{1} + 0.25\mathbf{\Omega}^3\mathbf{1} - 0.125\mathbf{\Omega}^4\mathbf{1} + ...$$

$\rightarrow$ On obtient alors une somme de signes inversés : les puissances paires de $\mathbf{\Omega}$ sont pondérées négativement et les puissances impaires positivement.

$\rightarrow$ Le fait d'avoir beaucoup de liens directs augmente la centralité, mais si ces liens directs ont eux-mêmes beaucoup de liens directs, la centralité diminue, et ainsi de suite.

$\rightarrow$ " Les ennemis de mes ennemis sont mes amis ".

$\rightarrow$ La mesure de Katz-Bonacich s'interprète alors comme une mesure du **pouvoir** (de négociation) des individus.

Présentation

- On s'intéresse ici à un jeu simultané d'extraction d'eau à n participants (communes, agriculteurs, individus, ...).
- Chaque joueur possède une seule source d'extraction, et chaque source n'est exploitée que par un seul joueur.
- Les joueurs sont répartis sur un système hydrologique composé de plusieurs rivières interconnectées.
  - → Le cas le plus simple est celui d'une rivière unique.
  - → Les flux d'eau créent des dépendances unilatérales entre les joueurs.
  - → On autorise les cycles (dépendances souterraines, territoire escarpé, ...).
- Comment la structure du système hydrologique façonne-t-elle les comportements ? Comment l'eau doit-elle être allouée entre les participants ?

Présentation (suite)

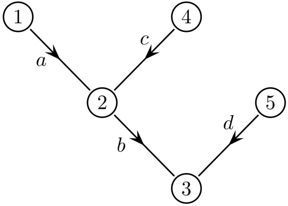
- On introduit deux postulats importants.

1. L'eau est une **ressource de propriété commune locale** :
   - $\rightarrow$ aucun participant n'est exclu a priori de la consommation d'eau ;
   - $\rightarrow$ il y a une rivalité locale sur l'eau (la consommation d'un participant est négativement impactée par la consommation de ses prédécesseurs directs, et elle impacte négativement la consommation de ses successeurs).
2. Les participants sont engagés dans un **jeu d'extraction non-coopératif** à information imparfaite mais complète, sans phases de négociation :
   - $\rightarrow$ modèle mal adapté au partage de l'eau entre plusieurs pays (doctrines, coopération, cf. chapitre 2) ;
   - $\rightarrow$ on s'intéresse à des conflits locaux sur l'eau, dans des territoires où l'eau est en accès libre (Mexique, Inde, ...).

Le jeu d'extraction

- Ensemble $N = \{1, ..., n\}$ de joueurs (1 joueur = 1 source d'eau), chaque joueur $i \in N$ décide de son extraction d'eau $x_i \geq 0$ (décisions simultanées).
- On suppose que le bénéfice unitaire de l'extraction est constant, on le note $p_i > 0$.
- Les joueurs sont répartis au sein d'un réseau de rivières représenté par un **graphe dirigé pondéré** de matrice d'adjacence $\mathbf{\Omega} = [\omega_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ où $\omega_{ij} > 0$ si ij est une portion de rivière et $\omega_{ij} = 0$ sinon ($\omega_{ii} = 0$).
  - $\rightarrow$ Les prédecesseurs directs d'un joueur sont appelés ses **voisins en amont**, ses successeurs sont appelés ses **voisins en aval**.
  - $\rightarrow$ La longueur d'un **chemin dirigé** est égal à son nombre de liens. Le poids d'un chemin dirigé est égal au produit du poids des liens constituant ce chemin.

Exemple : réseau acyclique pondéré



$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE: Un réseau acyclique de trois rivières (une principale et deux affluents) et cinq joueurs/sources. Les poids des liens reflètent l'intensité des flux d'eau entre deux joueurs/sources. La matrice d'adjacence associée à ce réseau est similaire à une matrice triangulaire.

Le jeu d'extraction (suite)

- L'utilité d'un joueur i est donnée par :

$$U^i(\mathbf{x}) = p_i x_i - q_i\left(x_i + \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j\right)$$

avec $q_i(.)$ une fonction de coût d'extraction définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $q_i' > 0$ et $q_i'' > 0$ pour tout $i \in N$.

$\rightarrow$ Le coût est convexe car **l'eau est rare** (Smith, 1968 ; Dinar et al., 1997).

$\rightarrow$ Les joueurs sont " pollués " par leurs voisins en amont, ie. ils supportent le coût de leur propre extraction et d'une fraction de l'extraction de leurs prédécesseurs directs.

$\rightarrow$ Il s'agit d'un jeu de substituts stratégiques **locaux** à externalités négatives **locales** ($U^i_j(\mathbf{x}) \leq 0$ et $U^i_{ij}(\mathbf{x}) \leq 0$).

$\rightarrow$ ω_{ji} représente l'intensité de la " pollution " de j vers i.

Le jeu d'extraction (suite)

- Le jeu des extractions simultanées est noté $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, avec règlements $U^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ et espace de stratégie $x_i \geq 0$ pour tout i, où $\mathbf{p}$ est le vecteur de bénéfices marginaux et $\mathbf{q}$ le vecteur des fonctions de coût.
- On s'intéresse aux équilibres de Nash en stratégies pures.

Hypothèse (H0)

$q_i'(0) < p_i < q_i'(\infty)$ *pour tout* $i \in N$.

- On appelle cette hypothèse les **conditions limites**.
  - $\to$ Si $q_i'(0) \geq p_i$, alors le joueur i n'effectuerait aucune extraction d'eau et pourrait être ignoré.
  - $\to$ Si $q_i'(\infty) \leq p_i$, alors le problème d'optimisation du joueur i n'a pas de solution.
  - $\to$ Cette hypothèse **garantit l'existence** d'un équilibre de Nash.

Les extractions d'équilibre

- On pose $\bar{z}_i = \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji}\bar{x}_j$.
- Chaque joueur maximise sa fonction d'utilité par rapport à sa propre extraction d'eau.

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Sous H0, un profil d'extractions $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n$ est un équilibre de Nash de ce jeu si et seulement si

$$\forall i \in N, \quad \hat{x}_i = \max\left\{0, x_i^* - \hat{z}_i\right\},$$

où $x_i^* = (q_i')^{-1}(p_i)$ est positif et fini (grâce aux conditions limites), et $\hat{z}_i = \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji}\hat{x}_j \geq 0$.

- Nous appèlerons x_i^* l'**extraction d'équilibre en autarcie** du joueur i et on notera (par mesure de simplicité) $\mathbf{x}^* = (\mathbf{q}')^{-1}(\mathbf{p}) = ((q_i')^{-1}(p_i))_i$.

Illustration

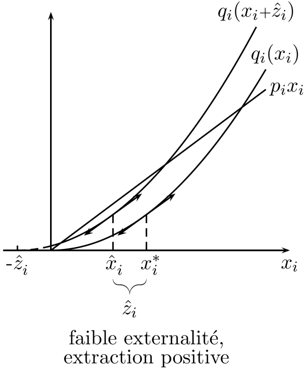


FIGURE: Les joueurs souhaitent extraire de l'eau tant que la somme des externalités négatives qu'ils reçoivent de la part de leurs voisins en amont est inférieure à leur extraction d'équilibre en autarcie.

les extractions d'équilibre (suite)

- Dans ce type de jeu, l'unicité de l'équilibre de Nash dépend du spectre de $\mathbf{\Omega}$ (Ballester et Calvó-Armengol, 2010 ; Bramoullé, Kranton et D'Amours, 2013 ; Rébillé et Richefort, 2014).
  - $\rightarrow$ Pour que l'équilibre de Nash soit unique, il faut que le réseau ne soit pas trop **dense** (ie. rayon spectral suffisamment petit).
  - $\rightarrow$ On s'intéresse ici aux équilibres de Nash intérieurs (l'eau est vitale).

Hypothèse (H1)

$\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}}\right) \mathbf{x}^* >> \mathbf{0}$.

- Cette hypothèse garantit l'unicité de l'équilibre.
- Elle impose que la différence entre l'extraction d'équilibre en autarcie d'un joueur et la somme des extractions en autarcie de ses voisins en amont soit toujours positive.

Les extractions d'équilibre (suite)

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ *un jeu d'extraction d'eau. Sous H0 et H1, ce jeu admet un unique profil d'équilibre qui est, de surcroît, intérieur.*

- La preuve est évidente car sous nos hypothèses, aucun individu ne peut être trop impacté par ses voisins en amont (cf. illustration précédente)
- Ce qui nous intéresse ici est de caractériser l'équilibre de Nash.
- Pour cela, on introduit une mesure de centralité, dérivée de la mesure de Katz-Bonacich.

Les extractions d'équilibre (suite)

Définition

Soit $\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ *un jeu d'extraction d'eau. Si* $\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}$ *est inversible, le vecteur*

$$\mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* - \mathbf{c}\left(1, -1, \boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}, \mathbf{x}^*\right) = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \mathbf{x}^*$$

mesure le ***pouvoir*** *des joueurs au sein du réseau.*

→ Le pouvoir d'un joueur dans le réseau est la somme de son extraction d'équilibre en autarcie avec le poids total de tous les chemins dirigés (eg. flux d'eau) qui arrivent à lui, où les chemin de taille impaire sont pondérés négativement et les chemins de taille paire positivement, et où le chemin dirigé qui part d'un joueur j est pondéré par x_j^*.

→ " Les ennemis (en amont) de mes ennemis (en amont) sont mes amis ".

Les extractions d'équilibre (suite)

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Sous H0 et H1, le profil d'équilibre de ce jeu est donné par

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\mathbf{\Omega}, \mathbf{x}^{*}\right).$$

- $\rightarrow$ La preuve est aisée car sous H1, $\mathbf{I} + \mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}}$ est inversible.
- $\rightarrow$ Ce résultat établit un pont entre l'économie et la sociologie (cf. Ballester, Calvó-Armengol et Zenou, 2006).
- $\rightarrow$ Les joueurs qui le **plus de pouvoir** dans le réseau peuvent extraire **plus d'eau**.
- $\rightarrow$ Ce jeu présente des “complémentarités cachées” (cf. Ballester et Calvó-Armengol, 2010).

Exemple

- Soit $\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Supposons que

$$U_i(\mathbf{x}) = px_i - \frac{\gamma_i}{2}\left(x_i + \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j\right)^2$$

pour tout i, où $p, \gamma_i > 0$.

$\rightarrow$ L'hypothèse H0 est satisfaite.

$\rightarrow$ L'extraction d'équilibre en autarcie est $x_i^* = \frac{p}{\gamma_i} > 0$.

$\rightarrow$ L'hypothèse H1 devient

$$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}\right)\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma}} >> \mathbf{0}$$

où $(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma}})_i = \frac{1}{\gamma_i}$ pour tout i.

$\rightarrow$ Lorsque cette condition est vérifiée, on obtient

$$\widehat{\mathbf{x}} = p\ \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma}}\right).$$

Les extractions efficientes

- Pour l'analyse du profil efficient, on adopte, sans perte de généralités, une approche utilitaire standard.
- La fonction de bien-être social est donnée par

$$SW(\mathbf{x}) = \sum_i U_i(\mathbf{x}) = \sum_i \left(p_i x_i - q_i \left(x_i + \sum_{j:j \neq i} \omega_{ji} x_j \right) \right).$$

→ On dira qu'un profil d'extractions est **efficient**, ou **socialement optimal**, si ce profil maximise la fonction de bien-être social.

→ On note $\tilde{\mathbf{x}}$ un tel profil.

Les extractions efficientes (suite)

- Les conditions du premier ordre sont

$$\begin{cases} \text{si } x_i > 0, \quad \text{alors } p_i - q_i'\left(x_i + \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j\right) = \sum_{h:h\neq i} \omega_{ih} q_h' \left(x_h + \sum_{k:k\neq h} \omega_{kh} x_k\right); \\ \text{si } x_i = 0, \quad \text{alors } p_i - q_i'\left(x_i + \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j\right) \leq \sum_{h:h\neq i} \omega_{ih} q_h' \left(x_h + \sum_{k:k\neq h} \omega_{kh} x_k\right). \end{cases}$$

$\rightarrow$ Un profil efficient d'extractions $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n$ vérifie, pour tout i,

$$\tilde{x}_i > 0 \iff p_i - q_i'(\tilde{z}_i) > \sum_{h:h\neq i} \omega_{ih} q_h'(\tilde{x}_h + \tilde{z}_h).$$

où $\tilde{z}_i = \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} \tilde{x}_j$ et $\tilde{z}_h = \sum_{k:k\neq h,i} \omega_{kh} \tilde{x}_k$.

Les extractions efficientes (suite)

- On s'intéresse aux profils positifs d'extraction (l'eau est vitale). On amende l'hypothèse précédente :

Hypothèse (H2)

$(\mathbf{I}-\boldsymbol{\Omega})\,\mathbf{p}-\mathbf{q}'\left(\boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{*}\right) >> \mathbf{0}$, *où* $p_i = q_i'(x_i^*)$ *pour tout* $i \in N$.

- Cette hypothèse garantit l'existence et l'unicité de l'optimum social.
- Elle impose que la différence entre le bénéfice marginal d'un joueur et la somme des bénéfices marginaux de ses voisins en aval soit toujours supérieure au coût marginal de l'impact négatif maximal (donné par l'extraction d'équilibre en autarcie) causé par ses voisins en amont.

Les extractions efficientes (suite)

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Sous H0 et H2, ce jeu admet un unique profil efficient qui est, de surcroît, intérieur.

- Sous H2, aucun individu ne peut être trop impacté par ses voisins en amont, et aucun individu ne peut lui-même trop impacter ses voisins en aval (H2 $\Rightarrow$ H1).
- Ce qui nous intéresse ici est de caractériser l'optimum social.
- Pour cela, on introduit une autre mesure de centralité, également dérivée de la mesure de Katz-Bonacich.

Les extractions efficientes (suite)

Définition

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Si $\mathbf{I} + \mathbf{\Omega}$ est inversible, le vecteur

$$\mathbf{b}^{+}_{\mathrm{alt}}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \mathbf{c}(1, -1, \mathbf{\Omega}, \mathbf{p}) = (\mathbf{I} + \mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{p}$$

*mesure la **valeur sociale** des joueurs au sein du réseau.*

- $\rightarrow$ La valeur sociale d'un joueur dans le réseau est la somme de son bénéfice marginal d'extraction avec le poids total de tous les chemins dirigés (eg. flux d'eau) qui partent de lui, où les chemin de taille impaire sont pondérés négativement et les chemins de taille paire positivement, et où le chemin dirigé qui se termine à un joueur j est pondéré par p_j.
- $\rightarrow$ "Les ennemis (en aval) de mes ennemis (en aval) sont mes amis".

Les extractions efficientes (suite)

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Sous H0 et H2, le profil efficient de ce jeu est donné par

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{x}}^{*}\right)$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*} = (\mathbf{q}')^{-1}(\mathbf{b}^{+}_{\mathrm{alt}}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p})).$$

→ Ici encore, la preuve s'appuie sur le fait que sous nos hypothèses, $\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathsf{T}}$ est inversible.

→ Ce résultat établit un lien en l'OS et l'EN dans ce type de jeu.

→ Les joueurs qui une **plus grande valeur sociale** devraient extraire **plus d'eau**.

→ L'OS est une combinaison de deux mesures de centralité.

Exemple

- On reprend notre exemple avec des bénéfices uniformes et des fonctions de coût quadratiques :

$$U_i(\mathbf{x}) = px_i - \frac{\gamma_i}{2}\left(x_i + \sum_{j:j\neq i}\omega_{ji}x_j\right)^2$$

pour tout i, où $p, \gamma_i > 0$.

$\rightarrow$ L'hypothèse H2 devient

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}}\right)\frac{\mathbf{1}}{\gamma} >> \mathbf{0}.$$

$\rightarrow$ Lorsque cette condition est satisfaite, on obtient

$$\tilde{\mathbf{x}} = p\ \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\mathbf{\Omega}, \mathbf{b}^{+}_{\mathrm{alt}}\left(\mathbf{\Omega}, \frac{\mathbf{1}}{\gamma}\right)\right).$$

Le design des politiques optimales

- Une politique optimale basée sur des quotas nécessite d'imposer un profil de quotas égal au profil efficient d'extraction.
- Cherchons dans quelle mesure la structure du réseau de rivières peut influencer le profil de taxes optimales.
- On pénalise les joueurs pour leurs déviations des extractions efficientes. L'utilité d'un joueur i devient

$$U_i\left(\mathbf{x}\right) = p_i\left(1 - t_i\right)x_i - q_i\left(x_i + \sum_{j:j\neq i}\omega_{ji}x_j\right),$$

où $t_i \in [0, 1)$ représente le taux de taxe sur les bénéfices du joueur i.

Le design des politiques optimales (suite)

- On montre alors le résultat suivant.

Proposition

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ un jeu d'extraction d'eau. Sous H0 et H2, les taux de taxe optimaux vérifient les propositions suivantes.

(a) $\forall i \in N$,

$$\tilde{t}_i = 1 - \frac{\left(\mathbf{b}_{\mathrm{alt}}^{+}\left(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}\right)\right)_i}{p_i}, \quad \textit{avec } \tilde{t}_i \in [0, 1).$$

(b) $\forall i \in N$,

$$\tilde{t}_i > 0 \iff i \textit{ possède un voisin en aval.}$$

Le design des politiques optimales (suite)

→ Les joueurs qui ont une **plus grande valeur sociale** devraient être **moins taxés**.

→ La taxe optimale dépend de la position des joueurs dans le réseau de rivières. Elle reflète à la fois les dommages marginaux et les bénéfices marginaux que les joueurs produisent sur leurs voisins en aval.

→ Les taux de taxe sont toujours entre 0 et 1 (ie. jamais négatifs).

→ Les joueurs qui n'ont **pas de voisins en aval** (et seulement ces joueurs-là) ne doivent **jamais** être **taxés**.

→ Il est très rare (mais possible) que les taux de taxe optimaux soient uniformes.

Exemple

- On reprend notre exemple des bénéfices uniformes et des coûts quadratiques. On suppose, comme le montre la figure ci-dessous, qu'il y a trois joueurs répartis le long d'une rivière unique.

$$1 \xrightarrow{\delta} 2 \xrightarrow{\delta} 3$$

- On suppose ici que le même poids $\delta \in (0, 1)$ est attaché aux deux liens et que δ est suffisamment petit pour que H2 soit satisfaite.

$\rightarrow$ On obtient :

$$\forall i \in N, \quad \tilde{t}_i = \frac{\delta + (-\delta)^{4-i}}{1+\delta},$$

avec $\tilde{t}_{\min} = \tilde{t}_3 = 0$ et $\tilde{t}_{\max} = \tilde{t}_2 = \delta$.

La tragédie des communs

- D'après nos résultats, on a $\mathbf{b}^{+}_{\mathrm{alt}}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}) = (\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{t}}) \times \mathbf{p}$ et $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}(\boldsymbol{\Omega}, (\mathbf{q}')^{-1}((\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{t}}) \times \mathbf{p}))$.
- On s'intéresse à présent au vecteur $\mathbf{d} = \widehat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$. Il vient

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}^{*}\right) - \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{x}}^{*}\right) = \mathbf{b}^{-}_{\mathrm{alt}}\left(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{d}^{*}\right)$$

où $\mathbf{d}^{*} = \mathbf{x}^{*} - \tilde{\mathbf{x}}^{*}$.

→ Comme $(\mathbf{q}')^{-1}$ est croissant par hypothèse et $\tilde{\mathbf{t}} \geq \mathbf{0}$, on montre que $\mathbf{d}^{*} >> \mathbf{0}$ lorsque $\tilde{\mathbf{t}} >> \mathbf{0}$.

→ C'est-à-dire, $\mathbf{x}^{*} >> \tilde{\mathbf{x}}^{*}$ lorsque chaque joueur possède au moins un voisin en aval dans le réseau.

→ C'est la tragédie des communs au sein d'un réseau !

La tragédie des communs (suite)

Propriété

Soit $\mathcal{G}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ *un jeu d'extraction d'eau. Alors, une tragédie des communs se produit, ie.*

$$\widehat{\mathbf{x}} >> \tilde{\mathbf{x}}$$

lorsque $(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}})\mathbf{d}^* >> \mathbf{0}$.

$\rightarrow$ Pour qu'une tragédie des communs se produise, il est **nécessaire** que tous les joueurs aient au moins un voisin en aval.

$\rightarrow$ Cf. Kaykobad (1985).

Présentation

- Dans le modèle présenté à la section précédente, un joueur = une source. Dans la réalité, il y a souvent **une multitude de sources** que les individus se partagent (pâturages, forêts, zones de pêche, sources d'eau).
- Nous conservons ici la métaphore du partage de l'eau.
- L'eau est toujours supposée être une ressource de propriété commune (pas d'exclusion d'usage mais rivalité locale) et les participants (communes, individus, agriculteurs) sont toujours dans un jeu d'extraction d'eau en information imparfaite mais complète, sans phase de négociation.

→ Quel est l'équilibre de Nash lorsque les individus **exploitent les sources d'eau librement** ?

→ Quelle est l'allocation efficiente des ressources en eau ?

Présentation (suite)

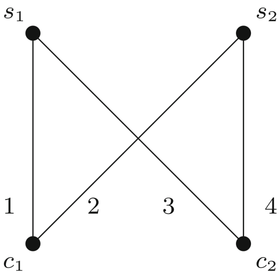


FIGURE: Réseau complet à deux joueurs (c_1 et c_2) et deux sources d'eau (s_1 et s_2). Les flux d'eau passant par les liens 1 et 2 sont des substituts stratégiques car ils offrent tous les deux de l'eau à c_1. Les flux d'eau passant par les liens 1 et 3 sont également des substituts stratégiques car ils connectent s_1 aux deux joueurs c_1 et c_2 (Ilkiliç, 2010).

Notations

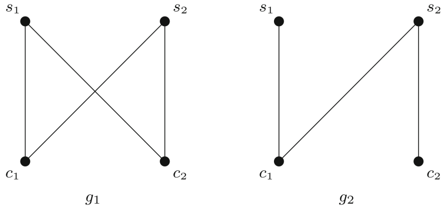
- Il y a n sources d'eau $s_1, ..., s_n$ et m joueurs (eg. municipalités) $c_1, ..., c_m$.
- Il existe un réseau qui relie des sources à des joueurs, et les joueurs peuvent acquérir de l'eau seulement à partir des sources auxquelles ils sont connectés.
- Le réseau, qui est fixe, est représenté par un **graphe biparti** non dirigé.
- Un graphe biparti non dirigé $g = (S \cup C, L)$ consiste en un ensemble de **nœuds** composé ici des sources $S = \{s_1, ..., s_n\}$ et des joueurs $\{c_1, ..., c_m\}$ et un ensemble de **liens** L, chaque lien connectant une source avec un joueur.
- Un lien entre la source s_i et le joueur c_j sera noté (i, j). On dénote par $N_g(s_i)$ l'ensemble des joueurs connectés avec la source s_i, ie.

$$N_g(s_i) = \{c_j \in C \text{ tel que } (i, j) \in g\}.$$

Le jeu d'extraction

- Etant donné g, chaque joueur c_j maximise son utilité en extrayant une quantité non-négative d'eau à partir des sources d'eau auxquelles il est connecté.
- On note $q_{ij} \geq 0$ la quantité d'eau extraite par le joueur c_j à partir de la source s_i.
- On note Q_g le vecteur colonne des quantités d'eau extraites.
  - $\rightarrow$ Donc, Q_g est le profil des extractions (lien par lien).
  - $\rightarrow$ Sa taille est égale au nombre de liens dans g, noté $r(g)$.
  - $\rightarrow$ Dans Q_g, le flux d'eau q_{ij} sera noté avant le flux q_{kl} lorsque $j < l$ ou lorsque $j = l$ et $i < k$.
- Etant donné Q_g, on note q_j la quantité d'eau totale extraite par le joueur c_j et q_i la quantité d'eau totale extraite à partir de la source s_i.

Exemple



$$Q_{g_1} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} \quad Q_{g_2} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix}$$

FIGURE: Deux réseaux différents composés de deux joueurs et deux sources. Les vecteurs colonne Q_{g1} et Q_{g2} reflètent les flux d'eau passant par chaque lien dans $g1$ et $g2$ respectivement. Le nombre de liens dans $g1$ est égal à quatre, donc la taille de Q_{g1} est égale à quatre. Le nombre de liens dans $g2$ est égal à trois, donc la taille de Q_{g2} est égale à trois (Ilkiliç, 2010).

Le jeu d'extraction (suite)

- La fonction d'utilité du joueur c_j est notée $u_j(Q_g)$.
- Pour un profil de stratégies Q_g donné, et pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$u_j\left(Q_g\right) = \alpha q_j - \frac{\gamma}{2} q_j^2 - \beta \sum_{s_i \in N_g(c_j)} q_{ij} q_i.$$

- Les deux premiers termes donnent le bénéfice (quadratique) de l'extraction totale, ie.

$$v_j\left(q_j\right) = \alpha q_j - \frac{\gamma}{2} q_j^2$$

→ Le bénéfice marginal (de pente γ) de l'extraction est une fonction linéaire et strictement décroissante de q_j.

Le jeu d'extraction (suite)

- Le troisième terme dans u_j donne le coût de l'extraction. Il s'agit d'une somme des coûts d'extraction de chaque source connectée à c_j.
- A chaque source s_i, on suppose que le coût d'extraction est une fonction quadratique :

$$T_i\left(Q_g\right) = \beta q_i^2$$

  et on suppose que chaque joueur paie une part du coût proportionnelle à son extraction.

$\rightarrow$ Donc, le coût d'extraction de q_{ij} par c_j dans s_i est :

$$T_{ij}\left(Q_g\right) = \beta q_{ij} q_i$$

Le jeu d'extraction (suite)

Remarque

La fonction d'utilité, malgré le fait qu'elle soit séparable en termes de bénéfice et de coût d'extraction,

$$u_j\left(Q_g\right) = v_j\left(q_j\right) - \sum_{s_i \in N_g(c_j)} T_{ij}\left(Q_g\right)$$

n'est pas séparable par rapport à chaque source.

→ L'utilité marginale de q_{ij} dépend des quantités extraites par c_j à partir d'autres sources que s_i.

Les extractions d'équilibre

- La meilleure réponse Q'_j du joueur c_j par rapport à Q_g est telle que, pour tout lien (i,j),

1. si $\frac{\partial u_j}{\partial q_{ij}} \geq 0$, alors

$$q'_{ij} = \frac{\alpha - \gamma \sum_{s_l \in N_g(c_j) \setminus \{s_i\}} q_{lj} - \beta \sum_{c_k \in N_g(s_i) \setminus \{c_j\}} q_{ik}}{2\beta + \gamma}$$

2. si $\frac{\partial u_j}{\partial q_{ij}} < 0$, alors

$$q'_{ij} = 0$$

Les extractions d'équilibre (suite)

Théorème

Le jeu d'extraction admet un unique équilibre de Nash.

- La preuve réside sur le fait que les CO1 d'équilibre (lien par lien) forment un **problème de complémentarité linéaire**.
- Un LCP $(p\,;\,M)$ est défini de la manière suivante.
- Etant donnés une matrice $M \in \mathbb{R}^{t\times t}$ et un vecteur $p \in \mathbb{R}^t$, le LCP $(p\,;\,M)$ consiste en trouver un vecteur $z \in \mathbb{R}^t$ tel que

$$\begin{array}{rcl} z & \geq & 0 \\ p + Mz & \geq & 0 \\ z^T(p + Mz) & = & 0 \end{array}$$

- Samelson (1958) montre qu'un tel problème admet une unique solution pour tout $p \in \mathbb{R}^t$ ssi tous les mineurs principaux de M sont positifs.

Les extractions d'équilibre (suite)

- Les CO1 du jeu d'extraction forment un LCP où $z = Q_g$, $p = -\alpha \mathbf{1}_{r(g)}$ et $M = D_g$, la matrice carrée (symétrique) du système linéaire d'équations formé par les fonctions de meilleure réponse.
- On montre ensuite que D_g est définie positive.
- Puis que la matrice hessienne des fonctions d'utilité est définie négative.

$\rightarrow$ Le jeu d'extraction admet un unique équilibre de Nash (cf. Ilkiliç, 2010).

$\rightarrow$ On s'intéresse maintenant à la caractérisation de cet équilibre.

Exemple

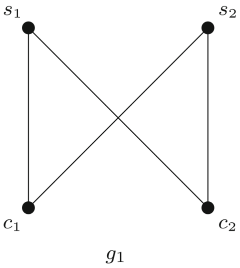


FIGURE: Soient $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Si le réseau est donné par $g1$, alors les flux d'équilibre sont $q^*_{11} = q^*_{21} = q^*_{12} = q^*_{22} = 0.2$. Si le réseau est donné par $g2$, alors à l'équilibre, $q^*_{11} = 0.2857$, $q^*_{21} = 0.1429$ et $q^*_{22} = 0.2857$. Le retrait du lien $(1, 2)$ modifie les extractions d'équilibre. Désormais, c_2 est seulement connecté à s_2 et l'exploite davantage. Cela rend les extractions en s_2 plus couteuses et c_1 extrait donc moins de s_2, mais davantage de s_1 où l'extraction est moins couteuse.

Les extractions d'équilibre (suite)

- Etant donné un graphe g, soit G^* la matrice carrée des liens dont les flux sont positifs à l'équilibre.
  - Si deux liens partagent une source, l'entrée correspondante dans la matrice est β, si deux liens partagent un joueur, l'entrée correspondante est γ, sinon l'entrée est 0.
  - Exemple :

$$G^*_{g2} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Pour une matrice d'adjacence G^*, et pour un scalaire $a > 0$ tel que $M(G^*, a) = (I - aG^*)^{-1}$ existe et est non négatif, le vecteur de centralités de Katz-Bonacich de paramètre a dans G^* est :

$$b\,(G^*, a) = (I - aG^*)^{-1}.\mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} (aG^*)^k$$

Les extractions d'équilibre (suite)

Théorème

Etant donné un réseau de sources communes g, le vecteur de flux à l'équilibre de Nash est

$$Q^*_{g-Z(Q^*_g)} = \frac{\alpha}{2\beta+\gamma}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(aG^*)^{2k}.\mathbf{1} - \sum_{k=0}^{\infty}(aG^*)^{2k+1}.\mathbf{1}\right)$$

où $a = \frac{\alpha}{2\beta+\gamma}$, et $g - Z(Q^*_g)$ correspond au sous-graphe de g composé exclusivement des liens dont les flux sont positifs à l'équilibre (nb. la matrice d'adjacence de ce sous-graphe est G^*).

- $\rightarrow$ Les flux d'extraction appartenant à un même chemin dans g, et séparés par un nombre pair (resp. impairs) de nœuds sont des compléments stratégiques (resp. des substituts stratégiques).
- $\rightarrow$ "Les ennemis de mes ennemis sont mes amis".

Les extractions efficientes

Définition

Etant donné un graphe g, un vecteur de flux Q_g est efficient s'il maximise la somme des utilités

$$U(Q_g) = \sum_{c_j \in C} u_j(Q_g) = \alpha \sum_{(i,j) \in g} q_{ij} - \frac{\gamma}{2} \sum_{c_j \in C} (q_j)^2 - \beta \sum_{s_i \in S} (q_i)^2$$

- Ici, le bien-être est simplement la somme des utilités, mais on pourrait utiliser d'autres définitions comme le maximin ou la somme pondérée des utilités.
- L'analyse du bien-être proposée ici est donc assez générale.

Les extractions efficientes (suite)

Proposition

Etant donné un graphe g, le vecteur de flux Q_g est efficient si et seulement si

$$\text{pour tout } (i,j) \in g \quad \begin{cases} \text{si } q_{ij} \neq 0, & \text{alors } \alpha = \gamma q_j + 2\beta q_i \\ \text{si } q_{ij} = 0, & \text{alors } \alpha < \gamma q_j + 2\beta q_i \end{cases}$$

- Ces conditions sont les CO1 d'efficience.
- Ici aussi, elles forment un LCP $(-\alpha\mathbf{1}_r\,;\,F_g)$.
  - $\rightarrow$ On montre que la matrice F_g est semi-définie positive.
  - $\rightarrow$ On montre également que la matrice hessienne de la fonction de bien-être est semi-définie négative.
  - $\rightarrow$ Le LCP $(-\alpha\mathbf{1}_r\,;F_g)$ admet toujours une solution, mais pas toujours une seule (cf. Ilkiliç, 2010).

Exemple

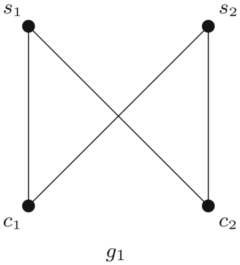


FIGURE: Soient $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Les flux efficients d'extraction sont donnés par $\{q^e_{11}, q^e_{21}, q^e_{12}, q^e_{22} \geq 0 : q^e_{11} + q^e_{12} = \frac{1}{3}, q^e_{21} + q^e_{22} = \frac{1}{3}, q^e_{11} + q^e_{21} = \frac{1}{3}, q^e_{12} + q^e_{22} = \frac{1}{3}\}$. Il existe donc un continuum de flux qui produisent un résultat efficient. Mais la somme des extractions de chaque joueur et à chaque source sont les mêmes pour tous les vecteur de flux satisfaisant la définition de l'efficience.

La tragédie des communs

- Dans ce modèle, si chaque source était exploitée par un unique joueur (eg. on affecte des droits de propriété sur les sources comme dans le modèle de la section précédente), alors l'équilibre de Nash est efficient car il n'y plus d'interactions stratégiques.
  - $\rightarrow$ La raison est qu'ici, les interactions stratégiques passent par les sources.
- En revanche, lorsque les sources sont partagées, une tragédie des communs se produit **sur ces sources**.

Proposition

S'il existe des sources partagées, alors les flux d'extraction en ces sources à l'équilibre sont supérieurs aux flux d'extraction efficients.

Conclusion

- On peut chercher à vérifier empiriquement ces résultats.

1. **Approche économétrique** (ex : jeux à une source d'eau)

→ On cherche à vérifier l'équation

$$x_i = x_i^* - \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j$$

- Le modèle à estimer s'écrit :

$$\text{pour tout } i \in N, \quad x_i = \alpha + \beta x_i^* + \gamma \sum_{j:j\neq i} \omega_{ji} x_j + \varepsilon_i, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_i|\mathbf{x}^*] = 0.$$

- En écriture matricielle, il devient :

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{x}^* + \gamma\mathbf{\Omega}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{x}^*] = \mathbf{0}.$$

→ Ce modèle est similaire à un modèle spatial autorégressif (Anselin, 1988 ; 2003).

→ Les problèmes sont nombreux, cf. Manski (1993).

Conclusion (suite)

2. **Approche expérimentale**

$\rightarrow$ On peut chercher à reconstruire les fonctions d'utilité des joueurs en fonction de leur comportement dans un jeu expérimental.

$\rightarrow$ On peut ensuite chercher à faire des prédictions sur les comportements individuels à partir des fonctions d'utilité au sein de différentes structures sociales/géographiques/spatiales.

$\rightarrow$ On peut ensuite tester les comportements en fonction des structures sociales/géographiques/spatiales.