Economie industrielle de l'environnement

II. Les jeux coopératifs de partage de l'eau

Lionel Richefort

Université de Nantes, LEMNA

Plan du chapitre

Lectures :

- Ambec S. et Sprumont Y. (2002), "Sharing a River", *Journal of Economic Theory*, 107(2), 453-462.
- Ni D. and Wang Y. (2007), "Sharing a Polluted River", *Games and Economic Behavior* 60(1), 176-186.
- Jackson M.O. (2010), *Social and Economics Networks*, Princeton University Press (voir chapitre 12).

Problématique

- L'allocation de l'eau est un problème complexe car les droits de propriété sur cette ressource sont mal définis.
  - → Dans le cas du partage d'une rivière, l'**efficience** requiert souvent que les individus se situant en amont limitent leur propre consommation.
  - → Cela permet aux individus se situant en aval, et dont les bénéfices marginaux sont plus élevés, d'augmenter leur consommation.
- Le théorème de Coase suggère que les individus pourraient échanger de manière efficiente de l'eau contre de l'argent si les droits de propriété sur l'eau étaient bien définis.
- Cela n'est pas le cas, et les conflits sur la définition des droits de propriété s'expriment jusque dans les deux principales **doctrines** utilisées au niveau international pour résoudre les problèmes de répartition de l'eau.

La Souveraineté Territoriale Absolue (ATS)

- Cette doctrine établit qu'un pays est libre d'employer l'eau qui se trouve sur son territoire comme bon lui semble : la ressource n'est pas du tout conçue comme commune.
  - → A la fin du XIX[ème] siècle, les Etats-Unis commencèrent la mise en valeur agricole du sud-ouest. Pour cela, ils se mirent à dériver le cours du Colorado afin d'irriguer les terres.
  - → En 1895, le Mexique protesta officiellement, rappelant que les droits d'usage des agriculteurs mexicains en aval étaient beaucoup plus anciens que ceux des Américains.
  - → Le gouvernement américain établit alors sa position (“ doctrine Harmon ”), selon laquelle “ le principe fondamental du droit international est la **souveraineté absolue** de chaque Etat, par opposition à tous les autres, sur son territoire ”.
- Cette doctrine est encore implicitement invoquée de nos jours par la Turquie et le Tadjikistan notamment, ce dernier envisageant même de facturer son voisin en aval, l'Ouzbékistan, pour l'eau du Syr Daria et de l'Amou Daria qui traversent son territoire (*The Economist*, 4 juillet 1998).

L'Intégrité Territoriale Illimitée (UTI)

- Symétrique du principe précédent, cette doctrine précise que chaque Etat doit permettre aux cours d'eau de poursuivre leur cours ; ils ne peuvent en interrompre le flot, ni en augmenter ou en réduire le débit.
- Cette doctrine favorise les Etats d'aval, qui se voient investis d'un droit de surveillance des activités des pays d'amont sur le cours des fleuves.
- Cette doctrine constituait la base de l'argumentation du Pakistan, par exemple, dans son litige avec l'Inde au sujet du partage des eaux de l'Indus.

Discussion

- En résumé, l'ATS octroie à un pays des droits de propriété sur l'eau provenant de son territoire, tandis que l'UTI étend ces droits à l'ensemble des débits d'eau provenant de territoires en amont. Existe-t-il un compromis entre ces deux doctrines ?
- Pour répondre à cette question, on étudie ici un modèle où un ensemble d'agents répartis le long d'une rivière ont des **préférences quasi-linéaires** pour l'eau et pour l'argent.
  - → On définit une allocation efficiente de l'eau comme une allocation qui maximise le bien-être total.
- Le problème des droits de propriété est transformé en un problème de distribution du bien-être que nous allons analyser à l'aide de la théorie des **jeux coopératifs**.
  - → L'ATS implique que chaque coalition d'agent(s) doit obtenir au moins son " bien-être minimal " (contrainte sur la limite inférieure du bien-être).
  - → L'UTI implique que chaque coalition d'agent(s) ne doit pas obtenir plus que son " bien-être maximal "(contrainte sur la limite supérieure du bien-être).

Le modèle

- Une rivière coule à travers un nombre de pays, de régions, de municipalités, de parcelles irriguées, désormais appelés des **agents**, dont l'ensemble est noté $N = \{1, ..., n\}$.
- Les agents sont identifiés grâce à leur position le long de la rivière et ils sont numérotés d'amont en aval : $i < j$ signifie que i est en amont de j.
- Si $S, T \subset N$, on écrit $S < T$ si $i < j$ pour tout $i \in S$ et pour tout $j \in T$.
  - → On dénote par min S et par max S, respectivement, le plus petit et le plus grand membre de S.
- L'ensemble des **prédécesseurs** de i est donné par $Pi = \{j \in N : j \leq i\}$.
  - → L'ensemble des **stricts prédécesseurs** de i est donné par $P^0 i = Pi \backslash \{i\}$

Le modèle (suite)

- La rivière gagne en volume pendant son parcours : le flux à sa source, $e_1 > 0$, est augmenté d'une quantité $e_i \geq 0$ entre les localisations $i-1$ et i (ie. en i).
- L'utilité qu'un agent i retire de la consommation de x_i unités d'eau et de la réception d'un transfert net d'argent t_i est

$$u_i(x_i, t_i) = b_i(x_i) + t_i$$

  où $b_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la **fonction de bénéfices** de l'agent i.
  - b_i est supposée différentiable en tout $x_i > 0$, strictement croissante et strictement concave.
  - Sa dérivée est notée b_i' et on suppose que $b_i'(x_i)$ tend vers l'infini lorsque x_i tend vers 0.

$\rightarrow$ Le triplet (N, e, b), où $e = (e_1, ..., e_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$, définit notre **problème**.

Exemple

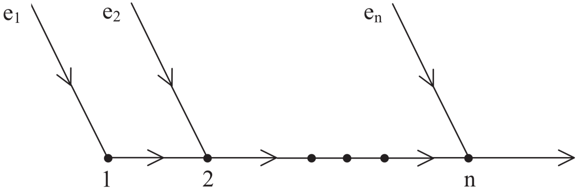

FIGURE: Une représentation schématique du modèle : n agents répartis (et classés de 1 à n, ie. du plus petit au plus grand) le long de la rivière, avec e_1 le flux d'eau à la source de la rivière (et donc à la position 1), e_2 la quantité d'eau supplémentaire arrivant dans la rivière entre les positions 1 et 2 (donc à la position 2), et e_n la quantité d'eau supplémentaire arrivant dans la rivière entre les potions $n-1$ et n (donc à la position n) (Ambec et Sprumont, 2002).

Le modèle (suite)

- Un **plan de consommation** (pour N) est donné par n'importe quel vecteur $x \in \mathbb{R}_+^N$.
- Pour une **coalition** arbitraire non vide $S \subset N$, $x_S \in \mathbb{R}_+^S$ reflète la restriction du vecteur x à l'ensemble S : il s'agit d'un plan de consommation pour la coalition S.
- Une **allocation** est un vecteur $(x, t) = (x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N$ qui satisfait aux contraintes de faisabilité

$$\sum_{i \in N} t_i \leq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in Pj} (x_i - e_i) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in N. \tag{2}$$

→ L'eau est traitée comme un bien privé.
→ Mais le flux d'eau e_i ne peut pas être consommé par les stricts prédécesseurs de i.

Le modèle (suite)

- Une **distribution du bien-être** est donnée par n'importe quel vecteur $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^N$ correspondant à l'utilité d'une allocation (x, t) tel que $z_i = b_i(x_i) + t_i$ pour tout agent i.
- Comme les préférences sont quasi-linéaires, une allocation $(x^*(N), t^*(N))$ est (Pareto) efficiente si et seulement si elle maximise la somme des bénéfices de tous les agents et elle ne gaspille pas d'argent.
- On appelle $x^*(N) \in \mathbb{R}_+^N$ un **plan de consommation optimal**.
  - $\rightarrow$ Grâce à nos hypothèses, ce plan est unique.
  - $\rightarrow$ Sa structure est simple car les bénéfices marginaux diminuent faiblement à mesure que l'on descend la rivière et si deux agents ont des bénéfices marginaux différents, alors une contrainte doit être liante entre eux.
- On doit à présent partager le bien-être maximal $\sum_{i \in N} b_i(x_i^*(N))$ parmi les agents.

La coopération

- Le plan de consommation optimal $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ nécessite généralement que les usagers en amont limitent leurs extractions d'eau.
- Si personne (ie. un régulateur) ne peut les y obliger, ils accepteront de limiter leurs extractions seulement s'ils reçoivent une compensation financière en échange.
  - $\rightarrow$ Cette compensation financière doit au moins couvrir la perte liée à une consommation d'eau inférieure à la quantité disponible.
  - $\rightarrow$ Mais comme cette compensation doit être financée par les agents en aval, elle ne doit pas excéder les bénéfices (en termes de consommation d'eau supplémentaire) de ces agents.
- Ces conditions d'acceptabilité des transferts, qui permettent la mise en place du plan de consommation optimal $x^*(N)$, sont basées sur la notion de **noyau** (ou cœur) en théorie des jeux coopératifs.
  - $\rightarrow$ Cela nécessite de définir formellement ce qu'un groupe d'agents peut obtenir dans notre problème (ie. la **fonction caractéristique**).

Exemple

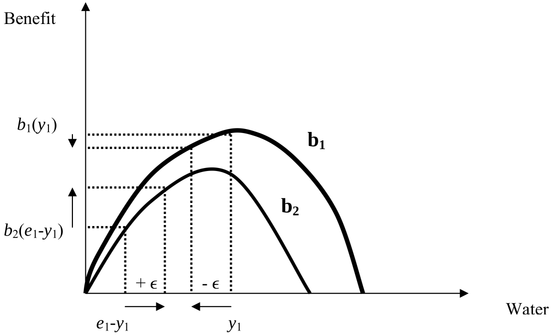

FIGURE: Cette allocation est inefficiente : l'agent 1 devrait renoncer à une partie de son eau, afin que l'agent 2 puisse en consommer plus. Mais l'agent 1 n'acceptera de diminuer sa consommation de ε que si la compensation financière est au moins égale à la flêche verticale vers le bas. De l'autre coté, la compensation financière maximale que l'agent 2 pourrait accepter de faire est égale à la flêche verticale vers le haut (Ambec et Ehlers, 2007).

La limite inférieure du bien-être

- Sous la doctrine de l'ATS, les agents sont autorisés à faire ce qu'ils veulent de l'eau qu'ils controlent. Cela génère une limite inférieure naturelle sur le bien-être.
- On dit qu'une coalition T est **consécutive** si $k \in T$ lorsque $i, j \in T$ et $i < k < j$.
  - $\rightarrow$ Toute coalition S admet une unique plus grossière partition $\mathcal{S}$ composée exclusivement de sous-coalitions consécutives.
- Soit $x^*(S)$ le plan unique de consommation pour toute coalition S qui maximise $\sum_{i \in S} b_i(x_i)$ sous les contraintes

$$\sum_{i \in Pj \cap T} (x_i - e_i) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in T \text{ et } T \in \mathcal{S}, \qquad (3)$$

La limite inférieure du bien-être (suite)

- On appelle
$$v\left(S\right) = \sum_{i \in S} b_i\left(x_i^*\left(S\right)\right) \tag{4}$$
le bénéfice sécurisé de S.
- Observons que $v(S) = \sum_{T \in \mathcal{S}} v(T)$.
  - $\rightarrow$ La coalition S ne peut pas sécuriser plus de bien-être car toute unité d'eau non consommée par une de ses sous-coalitions consécutives ne peut pas être garantie pour la consommation de n'importe quelle autre sous-coalition (hypothèse de non-satiété).
  - $\rightarrow$ Le jeu v est un **jeu consécutif** (Greenberg et Weber, 1986), au sein duquel seules les coalitions consécutives génèrent du surplus.
- Nous dirons qu'une distribution de bien-être $z = (z_1, ..., z_n)$ satisfait aux **limites inférieures du bien-être** si $\sum_{i \in S} z_i \geq v(S)$ pour tout $S \subset N$.

La limite supérieure du bien-être

- On s'intéresse à présent aux limites supérieures, dérivées de notre interprétation de la doctrine UTI.
- Même en l'absence des autres agents, l'agent i ne peut pas consommer plus que la totalité du flux d'eau qui arrive à lui. Son **bien-être maximal** est donc donné par $w(i) = b_i(\sum_{j \in Pi} e_j)$.
- On considère ici que l'agent i a un droit légitime à ce niveau de bien-être, mais pas plus (cf. Locke, 1690).
- Malheureusement, la distribution de bien-être $(w(1), ..., w(n))$ n'est pas réalisable dès lors que $n \geq 2$ car le problème (N, e, b) possède des externalités négatives.
  - $\rightarrow$ Aucun agent en particulier n'assumant une responsabilité quelconque pour ces externalités, il est naturel de demander à ce que chacun prenne en charge une partie de ces externalités.
  - $\rightarrow$ Aucun agent ne doit obtenir plus que son bien-être maximal.

La limite supérieure du bien-être (suite)

- Cette argumentation se généralise aux coalitions.
- Le **bien-être maximal** d'une coalition arbitraire S est le plus haut niveau de bien-être qu'elle peut atteindre en l'absence des autres agents $N \backslash S$.
- Il est obtenu en choisissant un plan de consommation x_S qui maximise $\sum_{i \in S} b_i(x_i)$ sous les contraintes

$$\sum_{i \in Pj \cap S} x_i \leq \sum_{i \in Pj} e_i \quad \text{pour tout } j \in S. \tag{5}$$

- Ce problème possède une solution unique, notée $x^{**}(S)$.

La limite supérieure du bien-être (suite)

- Le bien-être maximal de S est

$$w(S) = \sum_{i \in S} b_i \left(x_i^{**}(S)\right) \tag{6}$$

et nous dirons q'une distribution de bien-être satisfait aux **limites supérieures du bien-être** si $\sum_{i \in S} z_i \leq w(S)$ pour tout $S \subset N$.

→ Les niveaux maximaux de bien-être de deux coalitions complémentaires S et $N \backslash S$ sont incompatibles : $w(S) + w(N \backslash S) > v(N)$.

→ Donc si $\sum_{i \in S} z_i > w(S)$, l'inégalité opposée doit être vérifiée pour la coalition complémentaire : $\sum_{i \in N \backslash S} z_i < w(N \backslash S)$.

→ Cela signifierait que S bénéficie de l'existence de $N \backslash S$, tandis que $N \backslash S$ souffre de l'existence de S.

→ Cela contredit la définition que l'on peut se faire de l'équité et par conséquent, ni S ni $N \backslash S$ ne doit obtenir plus que son bien-être maximal.

La distribution amont-aval progressive

- Une relation évidente entre les limites inférieures et supérieures du bien-être apparaît : $v(Pi) = w(Pi)$ pour tout $i \in N$.
- Grâce à cette relation, la combinaison des deux ensembles de limites conduit à recommandation précise.

$\rightarrow$ Une seule distribution de bien-être satisfait aux deux ensembles de limites : il s'agit de la **distribution amont-aval progressive** z^* définie par $z_i^* = v(Pi) - v(P^0 i)$ ou, de manière équivalente, $z_i^* = w(Pi) - w(P^0 i)$ pour tout $i \in N$.

$\rightarrow$ On peut alors établir que la distribution amont-aval progressive satisfait aux limites inférieures et supérieures du bien-être de **toute** coalition.

La distribution amont-aval progressive (suite)

Théorème

La distribution progressive amont-aval z^* est l'unique distribution satisfaisant aux limites inférieures et supérieures du bien-être.

- La preuve montre que parmi l'ensemble des distributions satisfaisant aux limites inférieures du bien-être, elle est la seule qui maximise (de manière lexicographique) le bien-être des agents $n, n-1, ..., 2, 1$.
- La preuve montre également que parmi l'ensemble des distributions satisfaisant aux limites supérieures du bien-être, elle maximise (de manière lexicographique) le bien-être des agents $1, 2, ..., n-1, n$ (cf. Ambec et Sprumont, 2002).
- De cette manière, z^* peut être vue comme un compromis entre les doctrines ATS et UTI.

Extensions - 1

- Il était supposé que les agents étaient complètement ordonnés le long de la rivière.
- Cependant, le théorème de Ambec et Sprumont se généralise au cas où les agents sont répartis sur un réseau de rivières.
  - $\rightarrow$ Comme le réseau est acyclique, on peut ordonner les agents.
  - $\rightarrow$ Les contraintes de faisabilité restent les mêmes.
  - $\rightarrow$ La partition d'une coalition se fera en sous-coalitions **connectées**.
  - $\rightarrow$ La distribution progressive du bien-être amont-aval reste l'unique distribution satisfaisant aux deux limites du bien-être.

Extensions - 2

- Il était supposé que les fonctions de bénéfices (nets) étaient croissantes.
- Il peut être intéressant d'analyser le cas où elles diminuent éventuellement.
  - $\rightarrow$ Les fonctions de bénéfices seraient croissantes jusqu'en un certain niveau de consommation y, puis au delà de ce niveau, elles seraient décroissantes.
  - $\rightarrow$ La quantité y_i s'interprète alors comme le point de satiété de l'agent i : au-delà de ce point, le bien-être de i diminue car il surconsomme l'eau.
- Dans ce cas, une coalition pourra sécuriser plus de bien-être car une partie des unités d'eau non consommée par une de ses sous-coalitions consécutives pourra être garantie pour la consommation de n'importe quelle autre sous-coalition.
- Cf. Ambec et Ehlers (2007).

Extensions - 3

- Un aspect important de la gestion des rivières concerne le contrôle de la pollution.
- Le modèle de Ambec et Sprumont (2002), connu sous le nom de " River Sharing Problem ", pourrait aider à comprendre une partie du problème en réinterprétant x_i comme une mesure du niveau de pollution généré par l'agent i et e_i comme la pollution admissible limite en i.
  - $\rightarrow$ Bien sûr, il faudrait que ces plafonds soient négociés au préalable.
  - $\rightarrow$ Cela complique de manière importante le modèle de Ambec et Sprumont.
- Dans ce qui suit, on s'intéresse plutôt au dual du modèle de Ambec et Sprumont, ie. comment doit-on partager les coûts de dépollution d'une rivière polluée ?

Introduction

- Une rivière (pas trop) polluée génère des bénéfices et des nuisances aux individus vivant le long de la rivière.
  - $\rightarrow$ Pour l'analyse des bénéfices, cf. Ambec et Sprumont (2002).
- On s'intéresse ici à l'analyse des nuisances.
  - $\rightarrow$ Le problème est différent de celui d'Ambec et Sprumont et on interprète les doctrines ATS et UTI dans une perspective différente.
  - $\rightarrow$ On estime qu'il existe une relation duale entre les **droits** et les **responsabilités** (ou **devoirs**).
  - $\rightarrow$ On voit les responsabilités comme les contreparties des droits et donc, on interprète les doctrines ATS et UTI en termes de responsabilités dans notre problème d'allocation des coûts de dépollution.

Introduction (suite)

- La doctrine ATS peut être considérée ainsi : les individus vivant dans le $j^{\text{ème}}$ segment de la rivière ont la souveraineté absolue de demander à tous les pollueurs localisés au sein du segment j de payer les coûts de dépollution.
  - $\rightarrow$ Cette transformation de la doctrine ATS est appelée le principe de **responsabilité locale** (LR).
- La doctrine UTI peut être considérée ainsi : les individus vivant dans le $j^{\text{ème}}$ segment de la rivière ont le droit de demander aux pollueurs localisés au sein du $j^{\text{ème}}$ segment ainsi qu'à tous les pollueurs se situant en amont de payer les coûts de dépollution.
  - $\rightarrow$ Cette transformation de la doctrine UTI est appelée le principe de **responsabilité aval** (DR).

Introduction (suite)

- Dans ce qui suit, on supposera que les coûts de dépollution de chaque segment de la rivière sont au minimum déterminés par les standards environnementaux correspondant.
- Notre problème est donc le suivant. Comment répartir les n coûts de dépollution parmi l'ensemble des pollueurs tout en tenant compte du principe LR et/ou du principe DR ?
  - → Le principe LR implique que si les coûts de dépollution sur le segment j sont nuls, les pollueurs vivant dans ce segment ne devraient rien payer.
  - → Les implications du principe DR sont moins évidentes.
    1. Tout d'abord, les coûts de dépollution du segment j ne doivent pas être supportés par les pollueurs se situant en aval.
    2. Ensuite, comment répartir les coûts de dépollution du segment j parmi les pollueurs en amont de j ?
    3. On choisit ici l'équité, ie. une répartition égale des couts.

Le modèle

- On considère une rivière composée de n segments indexés dans un ordre donné $i = 1, 2, ..., n$ d'amont vers aval.
- Il y a n paires de ménage/firme (ie. agents) localisés le long de la rivière, chacun d'entre eux étant localisé sur un des segments de la rivière selon l'ordre donné.
  - $\rightarrow$ Chaque firme génère un certain niveau de pollution que chaque ménage cherche à éviter, et au sein de chaque segment, la firme i est localisée juste avant le ménage i.
- Dans chaque segment i ($i = 1, 2, ..., n$), une autorité environnementale établit une norme de pollution qui oblige l'agent i (ie. une paire ménage/firme) à dépenser c_i afin de dépolluer suffisamment le segment i.
- On cherche les bonnes méthodes pour allouer le coût total de dépollution ($c_1 + ... + c_n$) parmi l'ensemble des firmes (seules responsables de la pollution).

Le modèle (suite)

- Formellement, soit $N = \{1, ..., n\}$ un ensemble d'agents.
- Soit $C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n_+$ un vector de coûts de dépollution, où c_i représente les coûts supportés par l'agent $i \in N$.
- Un **problème de partage des coûts de dépollution** est une paire (N, C).
- Une **solution** au problème (N, C) est un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $\sum_i x_i = \sum_i c_i$ où x_i est la part du coût attribuée à l'agent $i \in N$.

$\rightarrow$ Une **méthode** est une transformation (" mapping ") qui attribue à chaque problème (N, C) une solution $x(N, C)$.

Le modèle (suite)

- On introduit les deux méthodes suivantes.
  - → Le **partage des responsabilités locales** (LRS), qui correspond au principe LR.
  - → Le **partage égalitaire aval** (UES), qui correspond au principe DR.

Définition

*Pour tout $C \in \mathbb{R}_+^n$, la méthode du **partage des responsabilités locales** est donnée par*

$$x_i^{LRS}(C) = c_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Définition

*Pour tout $C \in \mathbb{R}_+^n$, la méthode du **partage égalitaire aval** est donnée par*

$$x_i^{UES}(C) = \frac{1}{i}c_i + \frac{1}{i+1}c_{i+1} + ... + \frac{1}{n}c_n, \quad i = 1, ..., n.$$

Le modèle (suite)

- Soit $N = \{1, ..., n\}$ l'ensemble des firmes (ou de paires ménage/firme, ci-après nous parlerons de firmes ou d'agents).
  - $\rightarrow$ On suppose que les n ménages ne changent pas de localisation, quelles que soient les coalitions mises en place par les firmes.
- Soit $S \subset N$ une coalition formée à partir des n firmes.
  - $\rightarrow$ On dénote par $\min S$ le plus petit élément de S, ie. la firme la plus en amont dans la coalition S.
- Afin d'analyser les deux méthodes LRS et UES sous l'angle de la théorie des jeux coopératifs (ie. leurs connections avec la valeur de Shapley, ...), on définit deux jeux, chaque jeu étant relié à une méthode.

Jeu n°1 (LRS)

- Sous le principe LR, chaque membre de la coalition S est responsable seulement des coûts de dépollution sur son propre segment de rivière.
- La responsabilité totale de la coalition S est simplement la somme des responsabilités de ses membres.
- Donc, pour tout $C \in \mathbb{R}_+^n$, le coût total de la coalition S peut être écrit :

$$v^C(S) = \sum_{i \in S} c_i.$$

- On suppose que $v^C(\emptyset) = 0$.
- On a ainsi généré un premier jeu (N, v^C).

Jeu nº2 (UES)

- Sous le principe DR, chaque membre de la coalition S assume la responsabilité des coûts de dépollution de son propre segment ainsi que des segments en aval.
- Donc, pour tout $C \in \mathbb{R}_+^n$, le coût total de la coalition S peut être écrit :

$$w^C(S) = \sum_{i=\min S}^{n} c_i.$$

- On suppose que $w^C(\varnothing) = 0$.
- On a ainsi généré un deuxième jeu (N, w^C).

Caractérisation axiomatique de la méthode LRS

Additivité

Pour tout $C^1 = (c_1^1, ..., c_n^1) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $C^2 = (c_1^2, ..., c_n^2) \in \mathbb{R}_+^n$*, nous avons* $x_j(C^1 + C^2) = x_j(C^1) + x_j(C^2)$ *pour tout* $j \in N$*.*

- → Axiome classique en théorie des jeux coopératifs (Shapley, 1953) ainsi que dans la littérature sur le partage des coûts (Moulin, 2002).
- → Supposons qu'une firme i a deux divisions avec des coûts c_i^1 et c_i^2, et localisées le long de deux rivières différentes. Alors l'axiome d'Additivité dit qu'il est équivalent d'allouer à la firme le coût total de dépollution ou d'allouer à la firme les coûts de dépollution de chaque division séparément puis de les additionner.

Caractérisation axiomatique de la méthode LRS (suite)

Pas de Coûts Imposés

Pour tout $i \in N$ et pour tout $C \in \mathbb{R}^n_+$, si $c_i = 0$, alors $x_i(C) = 0$.

→ Cet axiome dit que si un agent n'a aucun coût de dépollution à supporter (eg. l'agent ne pollue pas du tout), alors l'agent ne devrait rien payer.

Efficience

$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n c_j$.

Caractérisation axiomatique de la méthode LRS (suite)

Théorème

La méthode LRS est la seule méthode satisfaisant les trois axiomes : Additivité, Pas de Coûts Imposés et Efficience.

Remarque

La méthode LRS indique que les firmes sont traitées équitablement : aucun coût n'est imposé à une firme qui ne supporte aucune responsabilité locale et le coût supporté par une firme est indépendant de sa localisation. Cela nous permet de penser que la solution du jeu (N, v^C) *est connectée à la valeur de Shapley.*

Solution du jeu (N, v^C)

- On rappelle tout d'abord que la valeur de Shapley permet une répartition équitable des gains dans un jeu (N, v) à utilité transférable (TU Game). Elle est donnée par

$$\phi(v) = \sum_{0 \leq s \leq n-1} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \left(\sum_{S \subset N \setminus i, |S|=s} v(S \cup \{i\}) - v(S) \right).$$

Proposition

Pour tout $C \in \mathbb{R}_+^n$ et $v^C = \sum_{i \in S} c_i$, nous avons $x_i^{LRS}(C) = \phi_i(v^C)$, $i \in N$.

$\rightarrow$ Ce résultat garantit la stabilité de la coopération dans le problème du partage d'une rivière polluée.

Caractérisation axiomatique de la méthode UES

Indépendance des Coûts en Amont

Pour tout $i \in N$, pour tout $C, C' \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $c_l = c'_l$, $l > i$, pour tout $j > i$, nous avons $x_j(C) = x_j(C')$.

- $\rightarrow$ Cet axiome est basé sur le principe de responsabilité aval (DR) qui est une interprétation en termes de responsabilités de la doctrine de l'Intégrité Territoriale Illimitée.
- $\rightarrow$ Il dit que le coût de dépollution supporté par un agent dépend de son propre coût de dépollution ainsi que des coûts de dépollution en aval, mais pas des coûts de dépollution en amont pour lesquels il n'a aucune responsablité.

Caractérisation axiomatique de la méthode UES (suite)

Symmétrie en Amont

Pour tout $i \in N$, pour tout $j, k \leq i$, nous avons

$$x_j\left(0, ..., 0, c_i, 0, ..., 0\right) = x_k\left(0, ..., 0, c_i, 0, ..., 0\right).$$

- $\rightarrow$ Cet axiome exige que tous les agents en amont ont des responsabilités égales pour un coût donné de dépollution en aval.
- $\rightarrow$ Cette répartition équitable des coûts de dépollution est supposée car (i) la pollution ne peut pas être facilement éliminée et (ii) il est difficile de connaître la quantité de pollution dont chaque agent est responsable.
- $\rightarrow$ Cet axiome suppose que la responsabilité de chaque agent est indépendante de la distance avec le segment pollué.

Caractérisation axiomatique de la méthode UES (suite)

Théorème

La méthode UES est la seule méthode satisfaisant les quatre axiomes : Additivité, Indépendance des Coûts en Amont, Symmétrie en Amont et Efficience.

Remarque

La solution UES exige que, pour un coût c_i $(1 < i \leq n)$*, toutes les firmes en amont devraient prendre en charge une responsabilité égale pour ce coût. Par exemple, toutes les firmes doivent prendre en charge la même fraction* $(1/n)$ *de* c_n*. Cependant, s'il existe une firme* j *dont les coûts de dépollution sur son segment* j *sont nuls* $(c_j = 0)$*, cette firme pourrait protester. Cela va à l'encontre du principe DR, selon lequel toutes les firmes doivent participer à la dépollution de la rivière. Alors, le choix de localisation d'une firme peut devenir une variable stratégique dans son analyse coûts-bénéfices.*

Solution du jeu (N, w^C)

- Cette dernière propriété établit que la méthode UES partage le coût total de dépollution de la rivière de la même manière que le partage des gains de coopération donnée par la valeur de Shapley.

Proposition

Pour tout $C \in \mathbb{R}^n_+$ et $w^C = \sum_{i=\min S}^{n} c_i$, nous avons $x_i^{UES}(C) = \phi(w^C)$, $i \in N$.

→ La méthode UES, qui peut sembler inéquitable, peut être justifiée par la théorie des choix de localisation de Tiebout.

→ Par exemple, si les technologies des firmes en amont doivent être utilisées avec de l'eau moins polluée, ces firmes sont effectivement prêtes à supporter un coût plus important de dépollution.