Université des Sciences Sociales de Toulouse

SEMESTRE 4 DE LA LICENCE MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

Epreuve de Contrôle Continu

STATISTIQUE 2

Mercredi 17 mars 2010 de 9h45 à 10h45

Les calculs doivent être justifiés,
l'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

Questions de cours (5 points)

1. Donner la définition de la convergence en moyenne quadratique d'une suite de variables aléatoires réelles.

2. Enoncer le théorème central limite et ses hypothèses.

3. Qu'appelle t-on erreur quadratique moyenne (EQM) d'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre θ ? Donner, en la justifiant, la relation entre l'EQM, le biais et la variance de $\hat{\theta}$.

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant une même loi d'espérance μ et de variance σ^2.

Soit $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Etudier la convergence en probabilités de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2 (3 points)

Soit X_n une v.a.r. positive de densité $f_n(x) = n\exp\{-nx\}\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.

Exercice 3 (6 points)

Soit X une v.a.r. de Weibull de densité

$$f(\theta, x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}}\, exp\{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}\}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où θ est un paramètre strictement positif inconnu.

1. Déterminer l'estimateur par maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ sur la base de n observations $x_1, \cdots, x_n$ issues de n v.a.r. i.i.d. comme X.

2. Montrer que la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3. En déduire que $\hat{\theta}_{MV}$ est un estimateur sans biais de θ.

Exercice 4 (3 points)
Soit X une v.a.r. uniforme sur $(0, \theta)$, avec θ paramètre inconnu strictement positif. Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_{MM}$ de θ par la méthode des moments basée sur $\mathbb{E}(X)$ sur la base de n observations $x_1, \cdots, x_n$ issues de n v.a.r. i.i.d. comme X.

Rappels sur les lois classiques

- **Densité et espérance de la loi exponentielle de paramètre λ :**

  $f(x) = \lambda exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ **et** $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

- **Densité de la loi uniforme sur (a, b) :**

  $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$.

Exercice 1 :

$$V_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2.$$

Pour trouver si V_n converge en probabilité on utilise la loi faible des grands nombre qui est :

(X_n) suite de v.a.r comme X avec $E(X) = \mu$

Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ alors $\bar{X}_n \xrightarrow[m \to \infty]{P} Y$ où $Y \sim \delta_\mu$.

Donc $V_n \xrightarrow{P} E(V_n^2)$

Or $E(V_n) = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right)$ ~~$E(V_n^2) - E(V_n)^2 = V(V_n)$~~

$= \frac{1}{m} E\left(\sum X_i^2\right)$

$= \frac{1}{m}\sum E(X_i^2)$

$= \frac{1}{m} \times m\, E X^2$

$= E(X^2)$

Or $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

$= \sigma^2 + \mu^2$

D'où $\overline{X_n} \to \sigma^2 + \mu^2$

Exercice 2 : $f_n(x) = m e^{-mx} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

$\lim_{m \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt = \int_0^x f_n(t)\,dt$

$(e^{-mt})' = -m e^{-mt}$

$= \int_0^x m e^{-mt}\,dt = m\int_0^x e^{-mt}\,dt$

$\frac{1}{m} e^{-mt} =$

$= m\int_0^x \frac{1}{m} e^{-mt}\,dt$

$= m\left[\frac{1}{m} e^{-mt}\right]_0^x = m\left[\frac{1}{m} e^{-mx} - \frac{1}{m} e^{-0}\right]$

$= m\left[\frac{1}{m} e^{-mx} - \frac{1}{m}\right]$

$= e^{-mx}$

2 cas : si $x < 0$ alors

$\lim_{m \to \infty} F_{X_n}(x) = 0$

si $x \geqslant 0$