Cf publication de Eaton.

Exercice d'application 1 : Jeux avec des préférences quadratiques

$$U^i(x_1,\dots,x_n) = x_i\left(\alpha - \beta x_i + \gamma \sum x_j\right)$$

$$= x_i\alpha - \beta x_i^2 + \gamma x_i \sum x_j$$ → quadratique strictement concave

1) Determiner les meilleures réponses en stratégies pures, de n joueurs

$\max\limits_{x_i \geq 0} U_i$ d'où $\mathcal{L} = x_i\alpha - \beta x_i^2 + \gamma x_i \sum x_j - \mu_i x_i$ avec $\mu_i \geq 0$, $\mu_i x_i = 0$

↳ contrainte de non négativité

CO1 : $\partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0 \iff \alpha - 2\beta x_i + \gamma \sum x_j - \mu_i = 0$

pour verifier condition de complémentarité de Kuhn-Tucker

Donc soit $x_i = 0$ soit $x_i > 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \Rightarrow x_i = \dfrac{\alpha}{2\beta} + \dfrac{\gamma}{2\beta}\sum x_j$

d'où $\boxed{\hat{x}_i = \max\left\{0\,;\ \dfrac{\alpha}{2\beta} + \dfrac{\gamma}{2\beta}\sum x_j\right\}}$

↳ si $\gamma > 0 \Rightarrow$ jeu CS $\Rightarrow$ ⊕ $x_j \nearrow$ ⊕ $x_i \nearrow$ (1)

si $\gamma < 0 \Rightarrow$ jeu SS $\Rightarrow$ ⊕ $x_j \nearrow$ ⊕ $x_i \searrow$

jeu de complements stratégiques à externalités positives (voir déf.).

~~(1) pourquoi CS et SS et pas EP/EN car $\partial U^i/\partial x_i$ ⇔ $\hat{x}_i$ ... de si $x_j \nearrow$ alors $\hat{x} \nearrow$ cad $U_i \nearrow$ → EP et non pas CS.~~

2) Résoudre le jeu pour $n = 2$ et $\gamma = -\beta < 0$

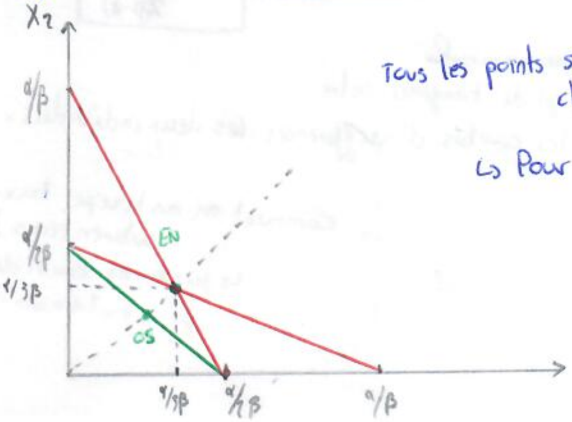
$$x_1 = \max\left\{0\,;\ \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}x_2\right\}$$

$$x_2 = \max\left\{0\,;\ \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}x_1\right\}$$ pt identique, coeff directeur identique

Si l'EN est intérieur il vérifie $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha}{2\beta} - \dfrac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \dfrac{\alpha}{2\beta} - \dfrac{1}{2}x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = \dfrac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ \frac{1}{2}x_2 = \dfrac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}(x_1+x_2) \end{cases}$

↳ Le système est symétrique donc il admet une solution unique $\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

D'où $x_1 = \dfrac{\alpha}{2\beta} - \dfrac{1}{2}x_1 \Rightarrow \boxed{x_1^{EN} = x_2^{EN} = \dfrac{\alpha}{3\beta}}$



Tous les points sur la droite verte st des optimums sociaux ⇒ on en choisit un

↳ Pour mieux comprendre le graph voir optimum social et taxe optimale.

Optimum social

On considère la $\sum U_i$ mais on pourrait choisir maxmin ou d'autres critères encore.

$$\max U_1+U_2 = \alpha x_1 + \beta x_1^2 - \beta x_1 x_2 + \alpha x_2 - \beta x_2^2 - \beta x_1 x_2$$

$$CO1 : \frac{\partial U_1+U_2}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta x_1 - \beta x_2 - \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{2\beta}$$

$$CO2 : \frac{\partial U_1+U_2}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta x_2 - \beta x_1 - \beta x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{2\beta}$$

droite verte

$\Rightarrow \exists$ une infinité d'optima sociaux i.e.

tt les (x_1, x_2) tq $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{2\beta}}$

Taxe optimale :

Elle vérifie $\frac{\alpha + t}{3\beta} = \frac{\alpha}{4\beta}$

EN

OS/2 car infinité de pt.

$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\alpha}{2\beta}$

↳ Car à l'O.S $x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{2\beta}$. On sq répartition équitable des efforts $\frac{\alpha}{4\beta}$??

$$\Leftrightarrow 4\alpha + 4t = 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t^* = -\frac{\alpha}{4}}$$

$\Rightarrow (\alpha+t)x_1 = \left(\alpha - \frac{\alpha}{4}\right)x_1 = \frac{3\alpha}{4} x_1$

On peut vérifier ce résultat :

$$U_1 = (\alpha + t)\, x_1 - \beta x_1^2 - \beta x_1 x_2$$

$$CO1 \Rightarrow \frac{3\alpha}{4} - 2\beta x_1 - \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3\alpha}{8\beta} - \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 = \frac{3\alpha}{8\beta} - \frac{1}{2} x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{4\beta}}$$

3) Résoudre le jeu pour $n = 2$ et $\beta > \gamma > 0$

$$x_1 = \max \left\{ 0 ; \underset{\text{prix}}{\frac{\alpha}{2\beta}} + \underset{\text{coeff directeur}}{\frac{\gamma}{2\beta}}\, x_2 \right\}$$

On sait déjà qu'il est int car $\frac{\alpha}{2\beta} > 0$ donc on peut oublier la sol° 0.

On cherche une solution intérieur pour l'équilibre :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta} x_2 \\ x_2 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{\gamma}{2\beta} x_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta}(x_2 + x_1) \\ x_2 + \frac{\gamma}{2\beta} x_2 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta}(x_2 + x_1) \end{cases}$$

→ système symétrique donc ~~[illegible]~~ solutions unique $x_1 = x_2$

$$\text{d'où} \quad x_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta} x_1 \Leftrightarrow \boxed{x_1^{EN} = x_2^{EN} = \frac{\alpha}{2\beta - \gamma}}$$

Optimum social :

$$\max U_1 + U_2 = \alpha x_1 - \beta x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + \alpha x_2 - \beta x_2^2 + \gamma x_1 x_2$$

$$CPO1 \Rightarrow \alpha - 2\beta x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{\beta} x_2}$$

↳ optimum social unique car coeff directeur ≠ 1.

$$CPO2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{\beta} x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\gamma}{\beta} x_1 \Rightarrow x_1^* = x_2^* = \frac{\alpha}{2(\beta - \gamma)} > \frac{\alpha}{2\beta - \gamma}$$

Politique optimale S.

Elle vérifie $\frac{\alpha + s}{2\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{2\beta - \gamma}$ EN \ OS

$$\Leftrightarrow \boxed{s^* = \frac{\alpha\gamma}{2(\beta - \gamma)} > 0}$$

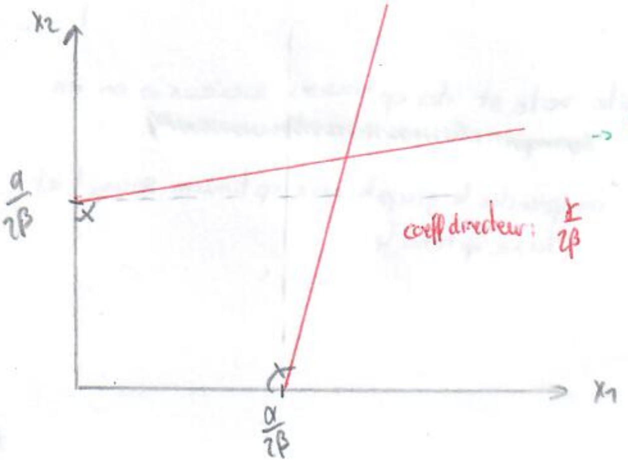
→ c'est de bien une subvention.

$$\Rightarrow U_1 = (\alpha + s^*)\, x_1 - \beta x_1^2 - \gamma x_1 x_2$$

on vérifie qu'on s'est pas trompé

$$CO1 \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha + s^*}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta} x_2 \quad \text{or } x_1 = x_2$$

$$\text{d'où } \boxed{x_1 = \frac{\alpha}{2(\beta - \gamma)}}$$



→ Les optimum sociaux est le pt de tangence entre les courbes d'indifférences des deux individus.

→ Comment on anticipe taxe ou subventions ?
↳ juste en considérant γ → externalités ?

Application 2 :

$$U_i = \underbrace{\ln(\theta x_i + \phi \sum x_j)}_{f : \text{ de } \pi \text{ concave}} - \underbrace{\eta x_i}_{g : \text{ coût linéaire}} \quad , \quad \eta > 0 \ ; \ \theta \geq |\phi| > 0$$

1) Stratégie de meilleure réponse

$$\mathcal{L} = \ln(\theta x_i + \phi \sum x_j) - \eta x_i + \mu_i x_i \qquad \text{avec } \mu_i \geq 0 \text{ et } \mu_i x_i = 0$$

$\max_{x_i \geq 0} U_i$

$$\text{CO 1} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_i + \phi \sum x_j} - \eta + \mu_i = 0$$

Soit $x_i = 0$; soit $\mu_i = 0$ et $x_i > 0 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_i + \phi \sum x_j} = \eta \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} \sum x_j$

si $\theta < 0 \Rightarrow$ S.S.
$\theta > 0 \Rightarrow$ C.S. ?

d'où $\hat{x_i} = \max\left\{0 ; \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} \sum x_j\right\}$

2) Résoudre ce jeu pour $n=2$ et $\phi > 0$

$x_1 = \max\left\{0 ; \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_2\right\}$

$x_2 = \max\left\{0 ; \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_1\right\}$

si $\phi = \theta$ alors les MR st confondues et on aura une infinité d'éq. de Nash.

On cherche l'éq. intérieur ($\exists$ car $\frac{1}{\eta} > 0$) : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_2 \\ x_2 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_1 \end{cases}$

↳ Si $\frac{\phi}{\theta} \neq 1 \Rightarrow x_1^{EN} = x_2^{EN} = \frac{1}{\eta} - \frac{\theta}{\theta} x_i = \frac{1}{\eta} \times \frac{\theta}{\theta + \phi}$ → chiant pour calculer l'optimalité de ensemble:

↳ Si $\frac{\phi}{\theta} = 1 \Rightarrow \forall (x_1, x_2) \ / \ x_1 + x_2 = \frac{1}{\eta}$ st eq. de Nash

Optimum social :

$\max \ \ln(\theta x_1 + \phi x_2) - \eta x_1 + \ln(\theta x_2 + \phi x_1) - \eta x_2$

$$\text{CPO 1} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_1 + \phi x_2} - \cancel{\eta} + \frac{\phi}{\theta x_1 + \phi x_2} = \eta$$

$$\text{CPO 2} \Rightarrow \frac{\phi}{\theta x_1 + \phi x_2} + \frac{\theta}{\theta x_1 + \phi x_2} - \cancel{\eta} = \eta$$

on égalise $\Rightarrow \theta x_2 + \phi x_1 = \theta x_1 + \phi x_2$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

D'où $\boxed{x_1^* = x_2^* = \frac{1}{\eta}}$

Taxe optimale :

→ On taxe les coûts et pas les bénéfices marginaux car + facile de taxer la partie linéaire.

$$U_1 = \ln(\theta x_1 + \phi x_2) - (\eta + t) x_1$$

$$\text{co 1} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_1 + \phi x_2} - (\eta + t) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\eta + t} - \frac{\phi}{\theta} x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\eta + t} \cdot \frac{\theta}{\theta + \phi} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \boxed{t^* = -\frac{\eta \phi}{\theta + \phi}}$$

3. Résoudre ce jeu pour $n=2$ et $\phi<0$

on cherche l'équilibre de Nash :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_2 \\ x_2 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_1 \end{cases}$$

→ Pour que ce système admette une solution : il faut que $|\phi| < \theta$

D'où $x_1 = \frac{1}{\eta} - \frac{\phi}{\theta} x_1 \iff \boxed{x_1^{EN} = x_2^{EN} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\theta}{\theta+\phi}}$

optimum social

$$\max \ln(\theta x_1 + \phi x_2) - \eta x_1 + \ln(\theta x_2 - \phi x_1) - \eta x_2$$

$$\begin{cases} (PC1) \Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_1 - \phi x_2} - \eta - \frac{\phi}{\theta x_2 - \phi x_1} = 0 \\ (PC2) \Rightarrow -\frac{\phi}{\theta x_1 - \phi x_2} + \frac{\theta}{\theta x_2 - \phi x_1} - \eta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta x_1 - \phi x_2} - \frac{\phi}{\theta x_2 - \phi x_1} = -\frac{\phi}{\theta x_1 - \phi x_2} + \frac{\theta}{\theta x_2 - \phi x_1}$$

$$\iff \frac{\theta + \phi}{\theta x_1 - \phi x_2} = \frac{\theta + \phi}{\theta x_2 - \phi x_1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

D'où $\frac{\theta}{\theta x_1 - \phi x_1} - \eta - \frac{\phi}{\theta x_1 - \phi x_1} = 0$

$$\iff \frac{\cancel{\theta - \phi}}{x_1 \cancel{(\theta - \phi)}} = \eta \iff x_1 = \frac{1}{\eta}$$

Application 3: $n=4$

1) $U_i = b_i x_i - q_i(x_i + \overbrace{\sum w_{ji} . x_j)}^{>0}$

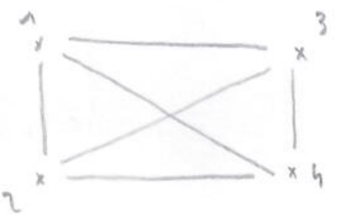
$\Rightarrow \partial U_i / \partial x_j = - \overset{>0}{w_{ji}} . q_i' \left(\overline{x_i + \sum w_{ji} . x_j} \right) < 0 \Rightarrow$ jeu à externalités négatives.

$\partial U_i / \partial x_i = b_i - q_i(\text{—})$

$\partial^2 U_i / \partial x_i \partial x_j = - w_{ji} . \underbrace{q_i''(\text{—})}_{>0 \text{ par hyp. de convexité}} < 0 \Rightarrow$ jeu substituts stratégiques.

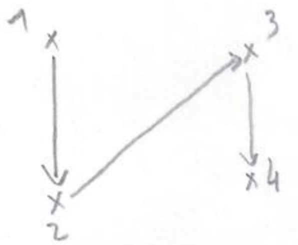
2) $n=4$

$w_{12} = w_{13} = w_{14} = w_{24} = w_{34} = 1$) graph non dirigé, non pondéré



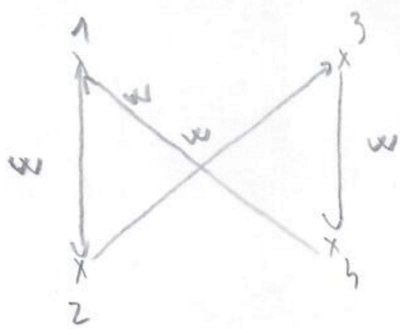
$$\Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $w_{12} = w_{23} = w_3$ -> graph dirigé non pondéré



$$\Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice booléenne $(0;1)$

4) $n=4$ $\underbrace{w_{12} = w_{23} = w_{34} = w_{41}}_{w} > 0$



$$\Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $w_{12} = 1/2$ $w_{13} = \frac{1}{3}$ $w_{14} = \frac{1}{4}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$