Chapitre 5 : Antoine Augustin Cournot : *l'économie mathématique comme science*

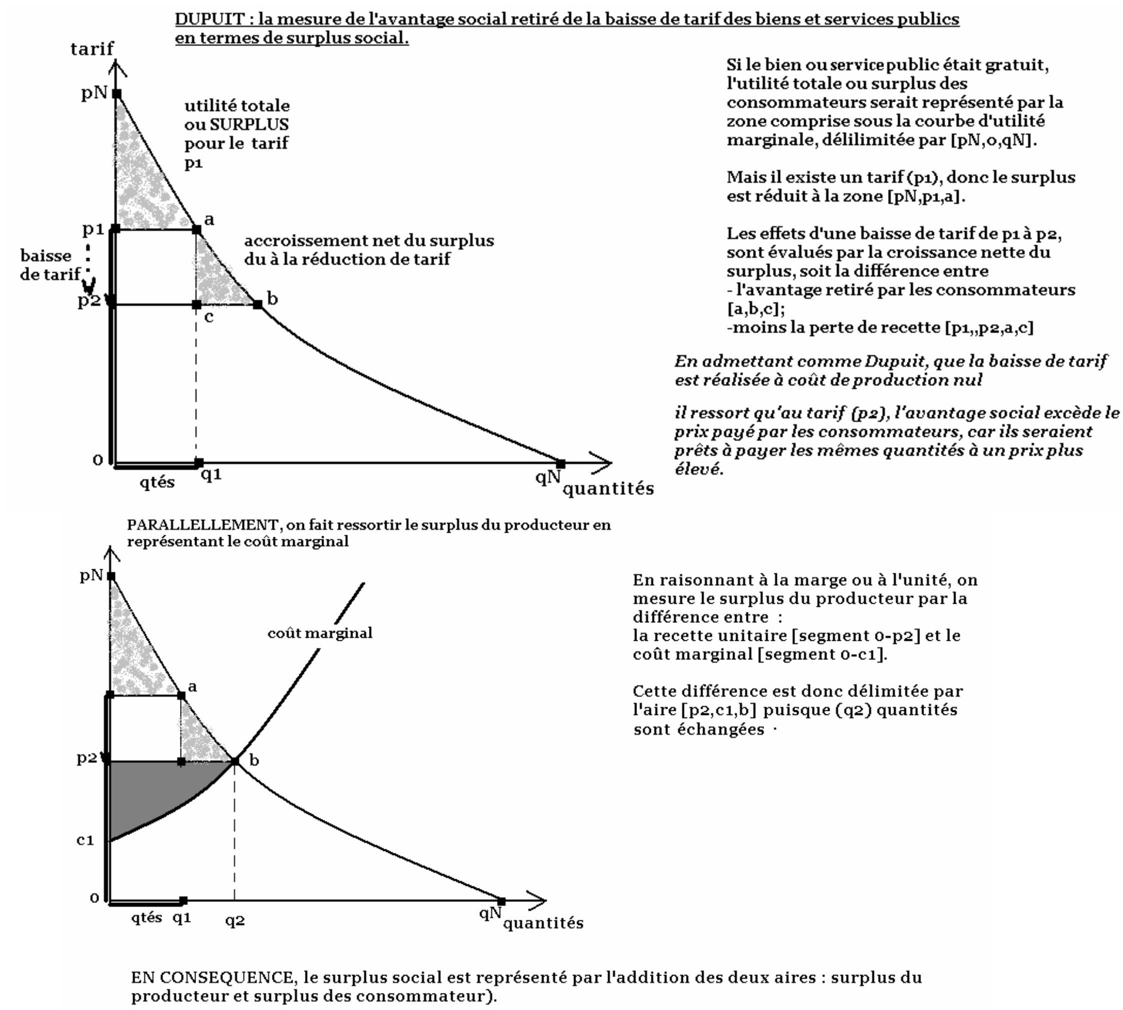
5.1) : Les précurseurs du Marginalisme : Von Thünen, H. Gossen, J.A Dupuit

La tentative d'élargissement du champ du calcul à la marge *(dérivation, intégration de fonctions continues)* apparait avant 1870. Avant les précurseurs du Néo-clacissisme, le mathématicien Bernoulli, le philosophe mathématicien Bentham, Godwin, mais aussi des auteurs importants dans les années 1830-50 comme **Lloyd, Longfield, Jennings**, recourraient, sans formalisation à la notion d'*utilité marginale.* Tandis que Ricardo et Malthus, avec la rente différentielle, raisonnaient, on le sait, sur *le « coût marginal »* des produits agricoles, sans l'énoncer ainsi.

C'est toutefois avec l'économiste **Von Thünen** (« L'Etat isolé » - 1824) que la précision sémantique commence, et que le calcul différentiel, pour résoudre le problème de la maximisation, devient opérationnel. Cet ouvrage énonce *la loi de l'égalité des prix des facteurs de production et de leurs produits marginaux*, c'est-à-dire pour prendre l'exemple du facteur travail, *le salaire est égal à la productivité marginale du travail.*
Dans son ouvrage de 1854, longtemps ignoré (*« Exposition des lois de l'échange »), H. Gossen,* formule la loi de l'égalité des utilités marginales pondérées par les prix, dans une analyse du comportement du consommateur.

L'ingénieur économiste français, **Jules Dupuit (1804-1866)** dans ses nombreux travaux (mémoires, articles etc..) applique ses capacités analytiques considérables à l'élaboration, dans le cadre de la théorie de l'utilité, des fondements de la demande et des rapports entre l'utilité et la mesure du bien-être associé aux travaux publics. Dupuit est le premier à développer en économie la théorie de l'utilité marginale (allant au-delà de la « demande » telle que la présente Cournot –voir 5.2), une variante de tarification au coût marginal, la théorie du monopole simple et discriminant, et la théorie de la localisation et des prix. Il est aussi le créateur de la théorie du surplus, qu'Alfred Marshall intégrera ensuite à la loi de l'offre et de la demande, et que Maurice Allais forgera plus tard en théorie autonome et alternative à l'équilibre général de Walras-Debreu (« Théorie générale des surplus », 1981).

Dupuit publie (après Cournot) entre 1844 et 1853 plusieurs articles sur les avantages sociaux des biens et services publics : eau potable, routes, canaux et ponts, s'inscrivant ainsi dans la tradition de l'Ecole des Ponts et Chaussées dont il fut diplômé. On rappelle ci-dessous sa méthode d'analyse des avantages, basé sur le concept de surplus dont la mesure est l'utilité « nette » (ou « utilité relative »).
Elle est basée sur la distinction entre *l'utilité totale* et *l'utilité marginale* retirée de la consommation d'un service ou d'un bien public, compte tenu d'un *tarif donné*. Dupuit représente la fonction *décroissante de l'utilité marginale* (qui est une expression de la demande) d'une part, et ignorant la courbe d'offre, la fonction *croissante de coût marginal* (qui est une expression de l'offre).
Le graph de la décroissance de l'utilité marginale est le suivant :



Fort de ces représentations, Dupuit analyse alors *la hausse des tarifs (passage de p2 à p1)*, comme une perte sociale nette (puisque diminue l'avantage social retiré par les consommateurs) .
Cette analyse souffre cependant d'insuffisances connues. La plus importante est que l'auteur ignore qu'il raisonne à l'aide d'une *mesure **cardinale** de l'utilité*, laquelle suppose des hypothèses particulières et n'autorise que des évaluations primaires. On la retrouve dans de semblable études, généralement menées sur le secteur du *chemin de fer*, partout où celui-ci se développait (en Angleterre, et aux USA).

C'est néanmoins dans la lignée de Dupuit que **Maurice Allais** s'opposera dans sa *« Théorie générale des surplus »*, 1981, à la rénovation de la théorie de l'équilibre général de Walras, entreprise par son ancien disciple G. Debreu et son collègue J.K Arrow (*« Théorie de la valeur »* de Debreu en 1959). M. Allais, né en 1911 était polytechnicien et Ingénieur, Professeur à l'Ecole des Mines et prix Nobel en 1988, a bénéficié de plusieurs influences dans ses travaux (Dupuit et Pareto, mais aussi Edgeworth, Walras, et Fisher). Soucieux d'expérimentation comme Dupuit, il remet en cause le *formalisme mathématique* de la rénovation de l'équilibre général. Il oppose aux hypothèses de « continuité, dérivabilité et convexité », nécessaires pour la détermination d'un équilibre général, un *« concept de surplus* (distribuable) *convenablement élaboré »*. Sa définition de l'équilibre général, différente de celle de Walras, est alors : *« il y a équilibre lorsque n'existe plus aucune possibilité d'échanges qui apparaissent avantageux aux opérateurs concernés, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus aucun surplus susceptible d'être réalisé »* (définition de type parétien).

5.2) Le marginalisme d'Antoine Augustin Cournot (1801-1877)

I) La pensée et l'œuvre de Cournot

Selon notre introduction, Cournot appartient à l'époque des précurseurs. Il fut en fait un fondateur du marginalisme.

La place accordée à Cournot est en effet plus importante. Outre son marginalisme et ses découvertes théoriques, **A.A Cournot** se préoccupe de la dimension épistémologique en Sciences sociales, en devenant un opposant au *« positivisme » de Comte* (mais aussi à l'Ecole Historique Allemande). Son cas est donc exemplaire et démontre que l'intérêt technique de connaissance ne va pas fatalement de pair avec l'affirmation du *monisme positiviste.* La philosophie conduit selon lui à *« soumettre à une épreuve critique la valeur des idées maîtresse de notre entendement »* (Cournot, cité par H. Denis). Ces idées ne seront pas diminuées, elles seront simplement devenues *« **probables** ».* Cournot assume sur ce point l'héritage de Kant. Ce qui le conduit à séparer *connaissance rationnelle d'un* côté, et de l'autre *morale et religion*. Tel est le cas de l'Economie, car selon Cournot *les activités* économiques sont dégagées de la morale et de la religion, dans la mesure où elles sont soumises à *« la loi (probabiliste) des grands nombres »* (raisonnement sur la moyenne). Cette loi efface toute morale dans chaque activité individuelle considérée isolément.

Toutefois l'antipositivisme « comtien » ne garantit pas de dérives épistémologiques, conduisant au même résultat. C'est peut être le cas de Cournot. Il déduit en effet de sa conception de l'évolution des sociétés que *« s'établit un ordre de faits sociaux qui tend à relever, omisso medio, des principes ou des idées purement rationnelles(…) »* de sorte que *« cela nous ramène à une sorte de mécanique ou de physique des sociétés humaines, gouvernée par la méthode, la logique et le calcul ».* (Cournot, cité par H. Denis)[C10]. Le kantisme critique de Cournot, semble alors se muer en une *conception leibnizienne de l'ordre social,* considérée comme une mécanique auto ajustable et parfaite. Dans le langage de Castoriadis, cela revient à concevoir la société comme un *« automate identitaire »*, pour lequel *« être »* signifie être *déterminé* et *prédéterminé.* Alors que pour une société, *« être »*veut dire *signifier,* ou *être lié à la signification.*

Kantien ou Leibnizien, Cournot adhère quoiqu'il en soit aux *principales idées du libéralisme*. L'économie de marché est selon lui dotée d'une efficacité supérieure ; les inégalités et la misère jouent parfaitement le rôle de frein à la croissance démographique au sens de Malthus ; il serait nuisible à la liberté de s'engager dans la voie du socialisme, qui est régi par un *« principe de fatalité économique ».*

Cournot peut être considéré comme ***l'inventeur de l'Economie Mathématique****.* Cette branche de l'Economie adopte une méthodologie spécifique, celle des *fonctions mathématiques continues et dérivables,* donc le *calcul infinitésimal,* dans le but de démontrer l'existence d'un équilibre des échanges sur le marché, équilibre **en quantités** chez Cournot. Toutefois, l'économie mathématique de Cournot, n'est pas encore celle des comportements individuels, guidés par le **postulat de rationalité**. S'agissant de la *fonction de demande, ou de « débit »* chez lui, soit D=*f*(p), elle n'est pas caractérisée à l'aide » des concepts *à venir*, mais qu'il trouve inopérants tels que : *utilité, rareté, satisfaction.* Les coutumes, la distribution des revenus, permettent de mieux caractériser la demande.

La biographie de Cournot permet de situer ses rencontres avec la mathématique et l'économie mathématique. C'est le mathématicien Laplace, qui développe en lui un engouement pour les mathématiques, tandis qu'il a 19 ans et étudie la philosophie et le droit. Il deviendra en 1823, diplômé de Mathématiques à la Sorbonne. Il est alors très influencé par les travaux de Laplace, Lagrange et Hachette, ancien disciple du Mathématicien Condorcet.

C'est avec Hachette qu'il s'initie à la *Mathématique sociale.* Il était par ailleurs très ami avec le Mathématicien Lejeune-Dirichelet. Au cours de sa vie Professionnelle, il fut constamment soutenu et aidé part le Mathématicien Poisson. La tentative de Mathématisation en Science sociale qu'il entreprend, n'aurait à ses dires, qu'un seul antécédent, celui des travaux de Canard. Dans la Préface à ses *«Principes de la Théorie des Richesses* (une version littéraire des « *Recherches* » -voir ci-après-), il présente son projet scientifique comme *une « révolution »* (voir l'extrait dans le Doc de cours N° 5.1.), et son œuvre comme *« une œuvre d'analyse critique ».*

Les œuvres majeures de Cournot sont :

1838 : *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, qui est considéré comme la naissance de toute l'Economie Mathématique, à l'exception de l'anglais W. Whewell, disciple de Ricardo, qui dès 1829 publiait *« A mathematical exposition of some doctrines of political economy »*

1841 *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*

1843 *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*

1863 *Principes de la Théorie des Richesses* (version littéraire des « Recherches »)

1861 *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*

II) Le marginalisme de Cournot : 1838 : *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*

On peut appeler *marginalisme de Cournot,* l'ensemble des thèses soutenues dans ses *« Recherches… »* de 1838. C'est sans doute à cause du mathématicien français **J. Bertrand,** qui soutint en 1877, que Cournot s'était trompé dans son chapitre VII des « Recherche », consacré à l'*oligopole*, que Cournot est resté *l'homme de l'oligopole* dit *« duopole de Cournot ».* En fait *les* « *Recherches* » comprennent 12 chapitres qui ont ni plus ni moins que fondé la nouvelle Ecole dite *marginaliste.* Nous pouvons le constater en passant brièvement en revue l'apport de chaque chapitre.

R. Dos Santos Ferreira souligne (dans le *« Dictionnaire des grandes œuvres économiques », op.cit)* l'importance de la Préface qui expose le *« programme de l'Economie mathématique ».* Là, Cournot explique qu'il s'agit non plus de raisonner sur les nombres, mais sur les fonctions. Les propriétés des fonctions qu'il entend utiliser sont : la continuité, la dérivabilité, et la monotonie dans le domaine de définition. L'avantage des Mathématiques selon Cournot est quadruple : la définition et l'analyse des problèmes économiques s'en trouve facilitées, elles ont aussi plus concises, plus facilement ouvertes vers de nouveaux développements, et non exposées au risques de l'argumentation vague.

Les trois premiers chapitres exposent, selon l'expression de Dos Santos Ferreira, *les piliers du paradigme néo-classique,* à une exception près, celle de la *valeur utilité dite* non mesurable par Cournot. La *richesse* est alors assimilée à la *valeur échangeable* (théorie classique). C'est donc plutôt le domaine des *prix* qui explique le parallèle. D'une part Cournot pose *la valeur comme une valeur relative,* adoptant ainsi nécessairement une *théorie de l'échange,* mais de plus il montre comment se réalise un *système de prix relatifs*. Il aborde ceci comme étant la question du *« change »*, et donc celui de l'échange de deux ou plusieurs marchandises entre elles. **On peut toujours dit-il passer de *n(n-1)/2combinaisons de valeurs relatives à un système cohérent de (n-1) prix relatifs*.** Le marché est donc *parfait* dans la mesure où les agents se réfèrent tous à un seul et même prix. Walras et Marshall adopteront cette démonstration.

On peut vérifier cette solution de Cournot à l'aide d'une matrice d'échange de rang 3, entre 3 marchandises « a, b et c ». Le tableau des échanges possibles s'écrit :

	a	b	c
a	aa	ab	ac
b	ba	bb	bc
c	ca	cb	cc

En excluant la diagonale, on a bien ***n(n-1)/2combinaisons de valeurs relatives*****.** Soit 3(3-1)/2 = 6/2 = 3
puisque ab,ac,bc ⇔ ba,ca,cb. Le ***système cohérent de (n-1) prix relatifs, soit ici (3-1) = 2 prix relatifs,*** est alors obtenu en choisissant l'une des marchandises comme étalon. Si par exemple « a » est la marchandise étalon, le système de prix se résout à « ac » et « ab », lesquels donnent immédiatement « cb » et « bc ». Ce qui permet de dire que les agents se réfèrent tous au même système de prix.

C'est Cournot qui, dans son Chapitre IV, définit ce que l'on appellera *la loi de la demande*, ou chez lui *« du débit »*. La Fonction de demande pour un bien s'écrit : D = F(p) avec D, la demande annuelle, p, le prix moyen annuel, et F, une moyenne des fonctions de demande instantanées. Ce sont les propriétés de la fonction (F) qui expliquent la loi de la demande.
La fonction (F) est décroissante, continue, finie à gauche [F(0)] et à droite [F(p) = 0 pour p=prix plafond]. De ces propriétés il découle que *la* ***dépense*** *totale* [p.F(p)] admet un extremum dont Cournot fournit la solution avec les conditions des 1^{er} *et* 2^{nd} *ordre.*
Toute cette démonstration part du principe général suivant le quel *« chacun cherche à tirer de sa chose ou de son travail la plus grande valeur possible ».*
Le Chapitre V traite du Monopole. La méthode de maximisation de la recette totale (RT) du monopoleur [p.f(p)] est, en l'absence de coûts, celle de l'égalité du prix et de la recette marginale [$\mathbf{p=}\boldsymbol{R_m}$]. La dérivée de la RT donne la R_m, que l'on annule en déterminant le prix adéquat. Si on introduit la fonction de coûts [Φ(D)], la condition de maximisation s'écrit $\boldsymbol{C_m = R_m}$. Cournot applique ceci à différentes catégories de biens selon leur coût marginal ; il distingue ceux dont le C_m est croissant appelés *biens fonciers*, et ceux dont le C_m est décroissant ou en « U », soit les biens manufacturés.
Connaissant ces conditions il est possible d'étudier les effets exercés par l'introduction de la taxation sur les prix de monopole. C'est l'objet du chapitre VI, où plusieurs types de taxes sont introduites : *fixe* (par unité), *proportionnelle* au CA, *proportionnelle* à la production, et en nature. L'Etat, les consommateurs, et le Monopole tirent des avantages et subissent des désavantages, que le chapitre met en évidence.
Enfin vient le très célèbre chapitre VII, consacré au *duopole*, ou marché dominé par deux gros vendeurs. Le dossier de cours N° 5.1 comprend un encadré qui présente la méthode de maximisation du *profit* du duopole. On remarque *l'introduction des « fonctions de réaction » et le choix d'une solution définitive au problème* basée sur ces fonctions, qu'il suffit d'égaliser. On appelle alors *solution de Cournot*, au problème du duopole, le fait que *chacun maximisant sa propre fonction*, le marché donne un *prix* et *un profit* inférieurs au niveau qui aurait été celui de la solution alternative de *l'entente (ou coopération).* Pour Cournot cette dernière solution est impossible *(fonctions de réaction oblige).* Notons que cette étude est étendue ensuite par Cournot à *n* concurrents producteurs d'un bien homogène.

Un exercice type sur le duopole de Cournot est par exemple le suivant :

Sur le marché d'un bien homogène X, deux offreurs A et B satisfont une demande de X, dont l'expression est : Pd = -2X + 200

Les fonctions de coût moyen respective des deux firmes sont :
$CM_A = 40$ et $CM_B = 20$
Il est demandé :

1) d'étudier les conséquences d'une première hypothèse : chaque firme ignore l'autre et se comporte en monopoleur ;
2) puis, en adoptant l'hypothèse de Cournot dite du duopole de double dépendance de calculer l'équilibre du marché. Donner les quantités qui seront offertes par chaque firme, et les profits alors réalisés ;
3) Enfin d'illustrer graphiquement à l'aide des *fonctions de réaction*, le cheminement vers l'équilibre.

Le chapitre VIII, aborde le même sujet, celui de l'équilibre, dans un environnement différent, et appelé la *« Concurrence indéfinie »*. On aura reconnu la concurrence *parfaite du marginalisme* ; C'est évidemment l'égalité des fonctions d'offre et de demande qui permet de déterminer le prix d'équilibre, suivant différents comportements des agents. Cournot introduit également la *taxation.*
Le chapitre IX est consacré à la concurrence de producteurs de *« substituts imparfaits »* (soit des matières premières différentes pour un même bien produit). Il recourt à l'hypothèse d'une *technologie à coefficient de production fixes et =1.* Walras reprendra ceci dans son équilibre général, puis on retiendra le nom de Léontieff pour parler de cette méthode. Contrairement au duopole, la solution de l'Entente n'est pas ici plus avantageuse.
Reste à Cournot à généraliser son approche, en l'élevant au niveau de l'Economie dans son ensemble. Ce qu'il réalise dans les chapitres XI et XII. L'auteur fait alors remarquer que *l' « hypothèse ceteris paribus »,* à la base de sa méthode pose problème dès lors qu'on considère les *interactions* entre marchés dans l'ensemble de l'économie. Ce faisant nous notons ainsi qu'il fournit à Marshall la dite hypothèse, et à Walras, le cadre de l'équilibre général. Le cadre seulement, car Cournot pense que les mathématiques sont à court pour atteindre un tel objectif comme celui de l'équilibre général. Il en fournit donc une simple approximation, sous les deux hypothèses de la concurrence indéfinie et du monopole.
Le chapitre XII est un élargissement de cet équilibre, de l'économie fermée, vers les échanges internationaux.

Conclusion sur Cournot

L'essentiel de la théorie néo-classique du *producteur et de l'équilibre partiel* vient des *« Recherches »* ; du fait de la différence sur la théorie de la valeur, il n'y a pas de théorie du consommateur chez Cournot. Longtemps éclipsée, l'œuvre de Cournot ressurgira avec R. Nash, en 1951. L'équilibre d'un *jeu non coopératif* auquel Nash aboutit, est une solution proche de celle de Cournot. Aussi a-t-on appelé cet équilibre *« Equilibre de Cournot-Nash »*. L'influence de Cournot ira alors grandissante, dans certaines reformulations de l'équilibre « néo-walrassien », et surtout dans le développement de la théorie de *l'organisation industrielle.*

Solution de l'exercice

1) Hypothèse du monopole : Chaque firme maximise son profit en ignorant l'autre. La fonction générale de profit est : π = RT – CT = recette totale – coût total = (p.X) – (CM.X). Soit pour chaque firme :
$\Pi_A = RT_A - CT_A = (p.X_A) - (CM_A.X_A) = (200-2X_A)X_A - 40X_A$. Le profit de A est maximum lorsque sa dérivée est nulle, soit : $d\,\Pi_A/dX_A = 0 \Leftrightarrow 200 - 4X_A - 40 = 0 \implies X_A = 40$
$\Pi_B = RT_B - CT_B = (p.X_B) - (CM_B.X_B) = (200-2X_B)X_B - 20X_B$. Le profit est maximum lorsque sa dérivée est nulle, soit : $d\,\Pi_B/dX_B = 0 \Leftrightarrow 200 - 4X_B - 20 = 0 \implies X_B = 45$
La production totale sera alors $X = X_A + X_B = 40 + 45 = 85$

Le *prix unitaire de marché* est pour ces quantités : p = 200 – (2×85) = 200-170=30
Dans ce cas, la firme A réalise *une perte* puisque Π_A = (40×30) – (40×40) = -400,
Tandis que la firme B encaisse un profit puisque Π_B = (45×30) – (45×20) = 450

2) <u>Hypothèse de Cournot</u>. On voit que chaque firme a intérêt à tenir compte de la *réaction* de sa concurrente pour élaborer sa stratégie, afin d'éviter le risque d'une perte.

On modifie d'abord la demande, laquelle s'exprime en fonction de l'offre globale cette fois :

$P_d = -2(X_A+X_B) + 200$

Les fonctions respectives de profit Π_A et Π_B seront en conséquence modifiées, bien qu'il faille toujours les maximiser séparément, soit :

$\Pi_A = [200-2(X_A+X_B)]X_A - 40X_A.$ $\Pi_B = [200-2(X_A+X_B)]X_A - 20X_A.$

On annule les dérivées premières pour déterminer les quantités optimales pour chaque firme :

$d\,\Pi_A/dX_A = -4X_A -2X_B +200 -40 = 0 \Longrightarrow X_A = 40-(X_B/2)$

$d\,\Pi_B/dX_B = -4X_B -2X_A +200 -20 = 0 \Longrightarrow X_B = 45-(X_A/2)$

(On suppose réalisée la condition de maximisation du second ordre)

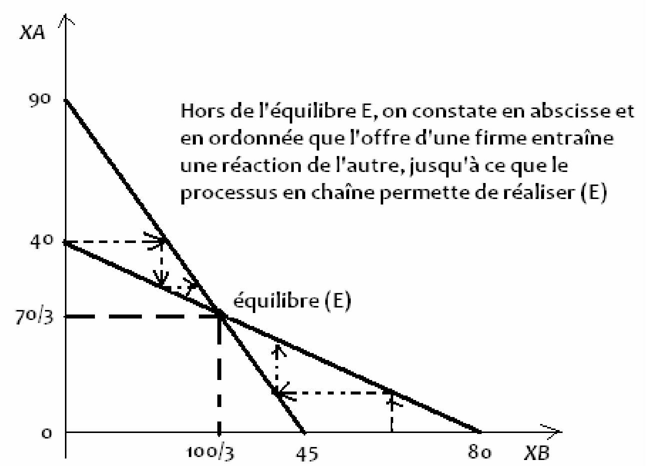
Les expressions **<u>$X_A = 40-(X_B/2)$ et $X_B = 45-(X_A/2)$ forment les *fonctions de réaction*</u>** de l'offre d'une firme étant donné l'offre de l'autre.

En résolvant le système formé par ces deux équations (par substitution), on obtient les quantités d'équilibre : X_A = 70/3 et X_B = 100/3 et donc la quantité optimale totale X = 170/3

Ces quantités seront offertes au prix de demande p = 260/3. Ce qui permet de déterminer le montant du profit de chaque firme, soit : Π_A = 1088,88 et Π_B = 2422,22

Le graphique des *courbes de réaction* permet de lire le cheminement vers l'équilibre (X_A=70/3 ; X_B=100/3).

<u>Fonction de réaction et cheminement vers l'équilibre dans le cas du duopole de double dépendance de COURNOT</u>



5.3) L'économie mathématique et le problème de la mesure de l'utilité

Si la découverte du principe de l'utilité marginale décroissante par les pères du marginalisme, marque bien le début d'une révolution mathématique en économie, elle n'en constitue pas moins l'inauguration d'un problème fondamental, immédiatement mathématique, et au-delà épistémologique : celui de la mesure du principal critère d'analyse : l'utilité.

Parmi les précurseurs certains s'en étaient défaits (Cournot), d'autres avaient pour la plupart adopté une conception implicite de l'utilité, celle de l'utilité cardinale ou mesurable (de Bernoulli à au surplus de Dupuit).

On sait que les trois fondateurs supposaient possible la définition d'un étalon de mesure de l'utilité, même si Walras (voir ci-après) avait réfléchi aux difficultés.

Le problème de la mesure de l'utilité se définit comme l'*impossible mesure de l'utilité totale attachée à un panier de biens composites*, et donc par *l'impossible comparaison des deux paniers de biens différents*.

Il résulte des difficultés de la mesure de l'utilité suivant plusieurs conventions successivement adoptées.

- La convention d'une *fonction d'utilité additive*, telle que l'adoptèrent les fondateurs (Menger, Walras, Jevons). Soit un tableau de classement des préférences entre 4 biens par un consommateur, au moyen d'un *nombre-indice* arbitraire, représentatif de l'utilité

T1 – Utilité ordinale : transformation *monotone*

biens	Utilité I	Utilité II	Utilité III,,
A	25	4	,,,,,,
Z	16	3	,,,,,,
E	9	2	,,,,,,
R	3	1	,,,,,,

On lit que si *l'ordre* ou *le classement est déterminant*, il importe peu de classer les biens suivant la colonne 1 ou la colonne 2, etc…. La fonction d'utilité est dite *ordinale* et « unique à une *transformation monotone près* ».

- La convention d'une fonction d'utilité *cardinale* et « unique à une *transformation linéaire près* ».

Dans ce cas la signification des nombres- indices est différente. La transformation doit conduire à une *invariance ou identité des indices*, à une constante multiplicative et additive près. Elle s'écrit sous la forme de la fonction linéaire : y = ax + b, où a et b sont des constante et « x » le nombre indice, ou utilité. Ce qui est illustré par le second tableau :

T2 – Utilité ordinale : transformations *linéaires*

biens	Utilité I	cste a	Utilité II	Utilité III,,
A	25	1,5	37,5	,,,,,,
Z	16	1,15	18,4	,,,,,,
E	9	1,23	11,07	,,,,,,
R	3	1,35	4,05	,,,,,,

On a supposé ci-dessus une constante multiplicative « a » qui conserve les préférences et « la mesure initiale » de l'utilité. Les indices successifs ne diffèrent donc que : suivant leur origine, et les unités arbitraires.

L'avantage de la seconde convention ressort immédiatement. La fonction d'utilité totale ainsi obtenue fournit des résultats sensés, lorsqu'on examine ses *variations premières et secondes.*
La dérivée première de la fonction classique U = *f*(x) est $U'_{x} \Leftrightarrow dU/dx$ = Utilité marginale du bien x,. Son signe indique si l'échelle est croissante ou décroissante.
La dérivée seconde $U''_{x} = d^2U/dx^2$ possède un signe >0 ou <0 qui permet de conclure à la croissance de l'utilité marginale ou à sa décroissance. Son signe indique donc l'intensité de la préférence.
Tout simplement parce que les indices sont liés entre eux par une transformation linéaire, telle celle qui lie la mesure de la température en d° centigrade et d° fahrenheit : F° = (9/5)°c +32°. La température ne différent pas selon la mesure, il est possible suivant l'une ou l'autre de dire si elle s'est accrue ou a diminué. On lit bien dans le tableau que : $U_A - U_z = 2\times(U_z - U_E)$

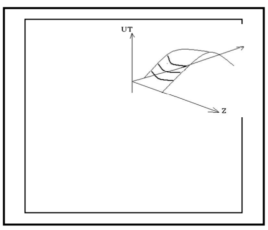
- Le problème demeure cependant. Il n'est pas possible de déterminer l'utilité totale d'un panier de biens composite (ici celui du panier : AZER) en *additionnant les utilités marginales* (c'est-à-dire les variations). Ou ce qui revient au même, on ne peut pas *intégrer les courbes d'utilité marginales* pour calculer l'utilité totale du panier.

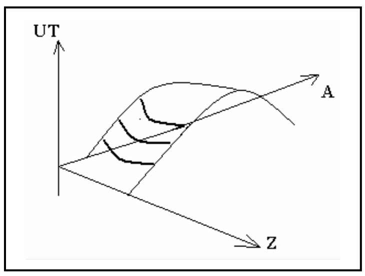
On suppose par exemple que le multiplicateur « a » égal 1 et « b = +4 » pour deux biens X et Y dont le niveau d'utilité initial est dans la première colonne ci-dessous :

biens	U 1	II	III	IV	V	utilité totale
X	4	8	12	16	20	4 +(3×4) = 16
Y	12	16	20	24	28	12 + (3×4) = 24
						40

On obtient une utilité totale du panier de 40, mais mesurée par un nombre indice qui n'a pas de sens.
Le fait que la variation ait un sens (3×4), ne supprime pas la différence inexpliquée à l'origine : 4#12.

- Le problème apparaît donc clairement comme celui de la nécessité d'une mesure unique de l'utilité, semblable à la longueur, ou au poids, pour comparer les utilités. Les deux conventions étudiées ci-dessus ont chacune leur limite.
    - Dans l'hypothèse « *ordinal* », pour reprendre l'expression de Blaug, si l'utilité est représentée par les courbes de niveau d'une montagne, on ne sait pas s'il s'agit du Mont Everest ou d'une simple butte. Le consommateur classe, à l'aide d'indices croissants sans qu'on puisse décider de la *hauteur* ;





    - Dans l'hypothèse « *cardinal* », il est possible de déterminer les valeurs des intervalles, mais on ignore l'origine et la pente.

Certes il existe une relation linéaire entre les indices, comme celle existant entre les deux types de mesure de la température. Mais elle ne supprime pas le double problème, comme l'illustre le cas de la relation F° = (9/5)°c +32°. Pour reprendre l'exemple de Blaug : je puis dire que la température a augmenté deux fois plus entre Dimanche et Lundi, qu'entre Lundi et

Mardi, mais je puis rien inférer quant à la différence de température entre samedi et Lundi, car selon que j'utilise l'échelle centigrade ou l'échelle fahrenheit la différence sera différente à cause du coefficient de proportionnalité (9/5), c'est-à-dire la pente. Quant à l'origine (ici 32°), elle est purement arbitraire.

- La théorie mathématique de l'utilité a donc progressé, mais à coup d'hypothèse sans cesse discutées.

Les premiers marginalistes, Walras en particulier, raisonnaient avec des fonctions d'utilité à un seul bien. L'utilité d'un bien est alors *supposé indépendante* de celle des autres biens, permettant la construction d'une échelle *cardinale de l'utilité.*
Par exemple, soit deux biens A et B, consommés en quantités Q_a et Q_b. Le consommateur attribue respectivement à chaque quantité, une utilité, sous la forme d'un nombre-indice, ou une *note*. Elle s'écrit pour la quantité Q_a ==> U_a (Q_a), et pour la quantité Q_b ==> U_b (Q_b).
Sous l'hypothèse d'une *utilité cardinale additive*, on peut déduire l'utilité totale d'un panier en quantités (Q_a,Q_b), notée $U_{(Qa,Qb)} = [U_a (Q_a) + U_b (Q_b)]$. Si la quantité Q_b est constante, alors l'utilité marginale du bien A s'écrit : $U_{ma} = \Delta Ua/\Delta Qa$. L'interprétation varie selon deux cas :
Si A est un bien non divisible et $\Delta Qa = 1$, alors la variation s'écrit :
$U_{ma} = U_a (Q_a + 1) - U_a (Q_a)$;
Si A est un bien divisible et la fonction U_a continue et monotone la variation s'écrit :

$$U_{ma} = \lim_{Qa \to 0} \frac{\Delta Ua}{\Delta Qa} = dUa/dQ_a,$$ c'est-à-dire la dérivée de la fonction U_a

Mais dès lors qu'on admet que l'utilité d'un bien peut dépendre des quantités consommées d'un autre bien (par exemple U_a de Q_b), on obtient alors une fonction d'utilité qui n'est *pas une transformation linéaire* de la première, si on choisit, dans un panier composé de plusieurs biens, une autre marchandise comme étalon. Ce problème a été exposé en 1892, par Irving Fisher.

Cette difficulté a été résolue par Edgeworth, par *l'introduction des courbes d'indifférence.*
Le consommateur est alors supposé attribuer une note globale à la fonction d'utilité
$U = f(Q_a,Q_b)$, laquelle devient une *fonction d'utilité généralisée*. Les Utilités marginales des deux biens sont cette fois les dérivées partielles de U par rapport à Q_a et Q_b, soit :
$U_{ma} = (\delta U/ \delta Q_a)$ et $U_{mb} = (\delta U/ \delta Q_b)$ ou en écriture différentielle $U_{ma} = U'_a \times dQ_a$ et
$U_{mb} = U'_b \times dQ_b$. La variation totale de l'utilité s'écrit alors : $dU = (U'_a \times dQ_a) + (U'_b \times dQ_b)$.
Lorsque la variation est nulle, soit dU=0, c'est que U est constante, et donc que l'on est sur une courbe d'indifférence d'un niveau donné. En modifiant la constante U, on peut alors écrire un système de courbes d'indifférences, appelé carte d'indifférence du consommateur. Chaque courbe identifie l'ensemble des paniers procurant au consommateur le même niveau de satisfaction. Comme il existe plusieurs niveaux, repérés par l'indice d'utilité, plus le consommateur s'élève, plus il retire de satisfaction de sa consommation.
On voit donc qu'il est encore admis de dire de « combien » s'est amélioré le niveau de satisfaction. Or, la démonstration de ce résultat demeure toujours impossible.
Finalement, c'est V. Pareto (cf plus loin) qui proposera d'abandonner toute référence à l'utilité cardinale. L'utilité (chez lui *« ophélimité »*) est une notion *ordinale*, qui suppose simplement que le consommateur *classe les paniers de biens par ordre de préférence*. La carte d'indifférence illustre cette *hiérarchie des préférences*. Par conséquent, c'est la fonction d'utilité elle-même qui devient une *fonction indice*.