Chapitre 1 : Fonction de répartition, autres outils probabilistes et premières simulations

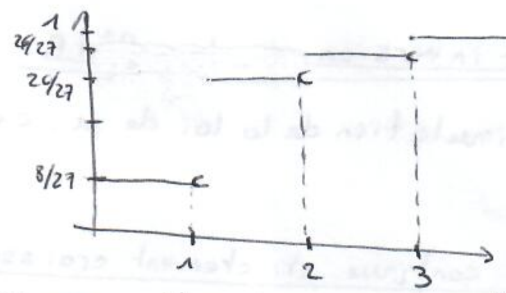
• FdR d'une v.a :

La f.d.R. de la v.a. X est $F_X : \mathbb{R}$

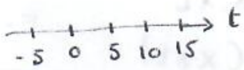
$t \longmapsto F_X(t) = P(X \leq t) = P_X(]-\infty ; t])$

exemples : - On lance 3 fois un dé. X = nbe de tirage ≥ 5

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$8/27$	$12/27$	$6/27$	$1/27$
$P(X \leq k)$	$8/27$	$20/27$	$26/27$	$27/27$



- Une personne ponctuelle a RDV avec qq'1 qui arrive entre 5 min avant et 15 minutes après. On note T son temps d'attente.

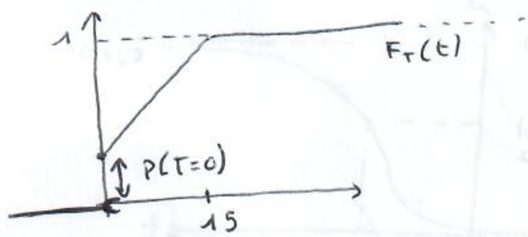


$P(T \leq t) = 0$ si $t < 0$

$P(T \leq t) = 1$ si $t \geq 15$

$P(T = 0) = \frac{1}{4}$ $\quad P(T \leq 0) = \frac{1}{4}$

si $0 < t < 15$ alors $P(T \leq t) = \frac{5+t}{20}$



* La v.a. X sur (Ω, F, P) est discrète s'il existe $\{x_1, x_2, x_3 \dots\}$ fini ou dénombrable tq $\sum P(X = x_k) = 1$. Connaître les $P(X = x_k)$ donne la loi. X n'a pas de densité.

Sa f.d.R. est discontinue.

La v.a. X sur (Ω, F, P) est à densité s'$\exists$ $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$f_X(t) \mapsto P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) \, d\lambda_1(x)$

* connaître la densité donne la loi. $= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)$.

* Toute f° positive f, d'intégrale 1, définie une loi de proba sur $\mathbb{R}$, celle définie par $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) \, d\lambda_1(x)$

• Espérance

Si X est une va sur (Ω, F, P) à valeurs ds $\mathbb{R}$ avec $P(X \geq 0) = 1$ son espérance est $E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X(x)$ ← Lebegue

$= \int_0^\infty P(X > t) \, dt = \int_0^\infty 1 - F_X(t) \, dt$ ← Reimann

* Cas de v.a. discrètes $\Rightarrow$ $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$.

* Cas des v.a. à densités $\Rightarrow$ $E(|X|) = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\, d\lambda_1(x)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ si $x \mapsto x f_X(x)$ est Reimann intégrable.

* Si X est une v.a. à densité f_X :

$$E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\, d\lambda_1(x)$$

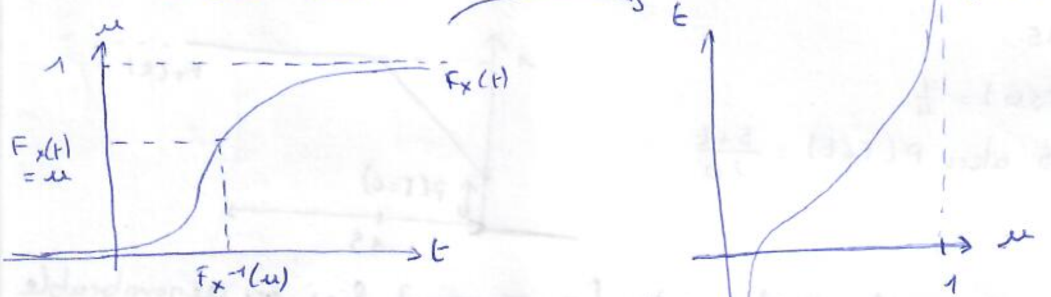
$$S = \pi R^2 \Rightarrow E(S) = E(\pi R^2)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \pi s^2 f_{\mathbb{R}}(s)\, d\lambda_1(s)$$

• <u>Simulation par inversion de la f$^{\text{ie}}$ d R.</u>

Faire une simulation de la loi de μ, c'est faire des tirages d'une v.a. de loi μ.

* <u>f d R continue, strictement croissante</u>

$F_X : \mathbb{R} \to]0,1[$ $\quad$ F_X a une réciproque $F_X^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$
$\quad t \mapsto P(X \leq t)$



Si $U \sim Unif(]0,1[)$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

<u>Propriété</u>: Si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X

on simule X en faisant un tirage $Unif(]0,1[)$ et en appliquant F_X^{-1} au résultat.

<u>Simulation de la loi de Cauchy</u>: $X \sim Cau(0,1)$ si X a pr densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}[\text{Arctan}\, x]_{-\infty}^{t} = \frac{\text{Arctan}\, t}{\pi} + \frac{1}{2} = u$$

$$\Leftrightarrow \tan[\pi(u - \tfrac{1}{2})] = t = F_X^{-1}(u) \sim Cau(0,1).$$