Chapitre 4 : Techniques de simulation, methode du rejet.

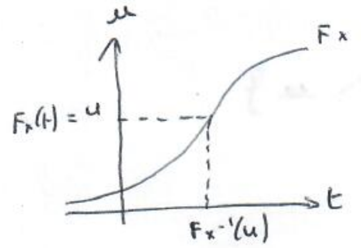
I. Simulation par inversion de la fonction de répartition.

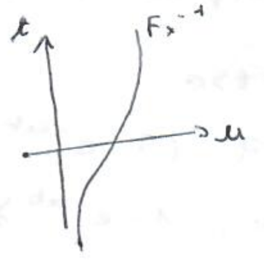
Faire une simulation de la loi μ, c'est faires des tirages d'une v.a. de la loi μ. On dit aussi qu'on simule la v.a. Z. Si on construit X v.a. ayant la même loi que Z.

1) Quand la f.d.R est continue strictement croissante.

On considère X v.a. et F_X continue, strict. croissante

$$F_X : \mathbb{R} \to]0,1[$$
$$t \mapsto P(X \leq t)$$





si $U \sim Unif(]0,1[)$ $\quad F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$

$$F_X^{-1}(U) : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$t \in \mathbb{R} \mapsto P(F_X^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F_X(t)) = F_X(t)$$

On simule X en faisant un tirage unif $(]0,1[)$ et en appliquant F_X^{-1} au résultat.

ex : simulation de la loi de Cauchy $Cau(0,1)$.

$X \sim Cau(0,1)$ si X a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = [\frac{1}{\pi} \text{Arctan}\, x]_{-\infty}^{t} = \frac{\text{Arctan}\, t}{\pi} + \frac{1}{2}$

si $u = \frac{\text{arctan}\, t}{\pi} + \frac{1}{2} = F_X(t)$ alors $t = \tan(\pi(u - \frac{1}{2})) = F_X^{-1}(u)$.

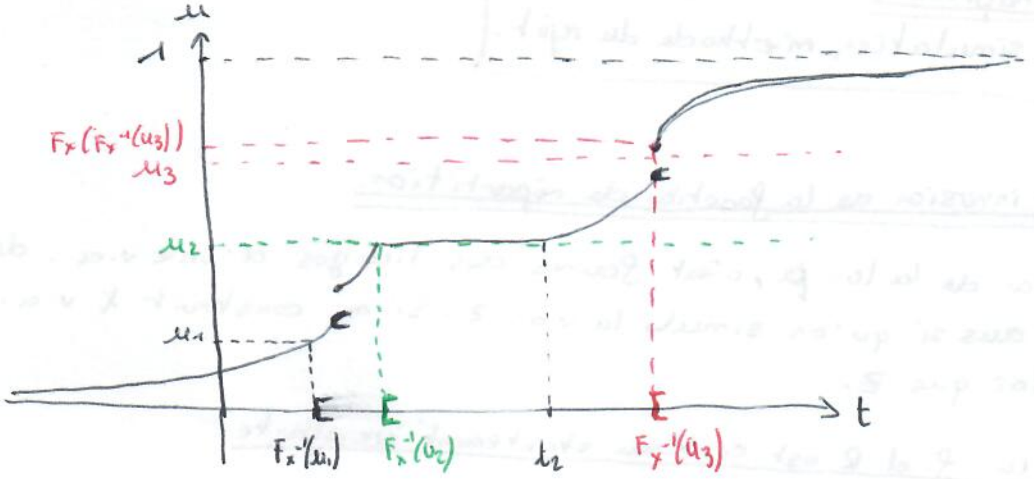
Conclusion : si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $\tan(\pi(U - \frac{1}{2})) \sim Cau(0,1)$

2) Simulation à partir d'une fdR quelconque

Définition et th. : Lorsque F_X est la fdR de la v.a. X, son pseudo-inverse (ou fonction quantile) est la fonction :

$$F_X^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F_X^{-1}(u) = \inf \{t \in \mathbb{R} ; F_X(t) \geq u\}.$$

$U \sim Unif(]0,1[)$ alors $F_X^{-1}(U)$ à la m̂ loi que U.



$F_X(F_X^{-1}(u_1)) = u_1$

$F_X(F_X^{-1}(u_2)) \leq t_2$

$F_X(F_X^{-1}(u_3)) \geq u_3$.

ex: simulation de la loi exponentielle

$X \sim \mathcal{E}xp(a)$ si X a pour densité $x \mapsto a e^{-ax} \mathbb{1}_{x>0}$

$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = (1 - e^{-at}) \mathbb{1}_{t>0}$

$\forall u \in]0,1[,\ F_X^{-1}(u) = \inf\{ t \in \mathbb{R},\ (1 - e^{-at}) \mathbb{1}_{t>0} \geq u \}$

$= \inf\{ t>0,\ 1 - e^{-at} \geq u \}$

$= \inf\{ t>0,\ 1 - u \geq e^{-at} \}$

$= \inf\{ t>0,\ -\frac{1}{a} \ln(1-u) \leq t \}$

$= -\frac{\ln(1-u)}{a}$

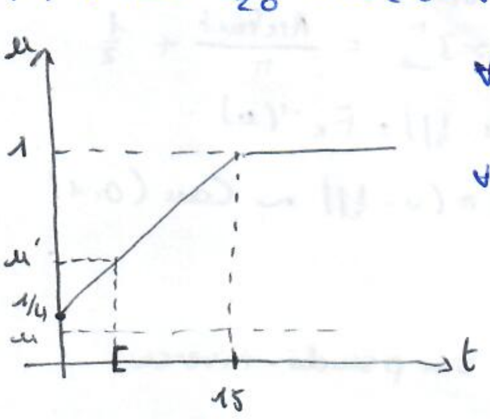
D'où $F_X^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$

$u \mapsto F_X^{-1}(u) = \frac{-\ln(1-u)}{a}$

si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $-\frac{\ln(1-U)}{a} \sim \mathcal{E}xp(a)$.

ex: simulation du temps d'attente T de la pers. ponctuelle

$F_T : t \mapsto \frac{t+5}{20} \mathbb{1}_{0 \leq t < 15} + \mathbb{1}_{t \geq 15}$



$\forall u \in]0; \frac{1}{4}[: F_X^{-1}(u) = \inf\{ t \in \mathbb{R},\ F_T(t) \geq u \}$

$= 0$

$\forall u \in]\frac{1}{4}; 1[: F_X^{-1}(u) = \inf\{ t \in \mathbb{R},\ \frac{t+5}{20} \geq u \}$

$= \inf\{ t \in \mathbb{R},\ t \geq 20u - 5 \}$

Chapitre 4 : suite

- ## Simulation de lois discrètes

- Simulation d'une loi de Bernoulli

Si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $\mathbb{1}_{U<p} \sim Ber(p)$

- Simulation de lois binomiales et multinomiales.

On simule $Bin(n,p)$ par $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i<p}$ où les U_i ind. de loi $Unif(]0,1[)$

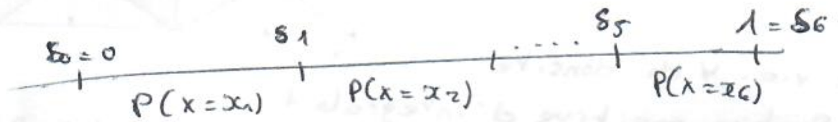
Même technique pour les multinomiales :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i \leq p}, \sum \mathbb{1}_{p_1 \leq U_i \leq p_1+p_2}, \sum \mathbb{1}_{U_i > p_1+p_2+p_3} \right) \sim Multi(n, p_1, p_2, p_3)$$

- Simulation de lois discrètes à support fini

On veut simuler X à valeurs ds $\{x_1, \dots, x_n\}$. On connait les proba $P(X=x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$

On note $s_k = \sum P(X=x_i)$



On tire $U \sim Unif(]0,1[)$ et on détermine l'unique k tq $s_{k-1} < U \leq s_k$; on pose alors $Y(\omega) = x_k$: Y simulera X.

$$P(Y = x_k) = P(s_{k-1} < U \leq s_k) = s_{k-1} - s_k = P(X = x_k)$$

ex : Simulation de loi

k	0	5	10
$P(X=x_k)$	$4/15$	$10/15$	$1/15$

$x_1 = 5 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 10$

- Simulation de loi géométriques

En moyenne, pour simuler la loi $géom(p)$, il faudra tirer selon $Unif(]0,1[)$ $E(Y) = \frac{1}{p}$ fois

Pour p petit, cette technique n'est pas pratique.

Si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $-\frac{\ln U}{a} \sim \mathcal{E}xp(a)$

et si $V \sim \mathcal{E}xp$ alors $\lceil V \rceil \sim Geom(1-e^{-a})$

$1 - e^{-a} = p \Rightarrow a = -\ln(1-p)$

ccl : si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $\left\lceil \frac{\ln U}{\ln(1-p)} \right\rceil \sim Géom(p)$.

- Simulation de lois de Poisson

Proposition : le nbe de $\mathcal{E}xp(a)$ ind. qu'on peut additionner en restant sous le seuil 1 suit la loi $Pois(a)$: Si $X_1, \dots, X_n$ st ind de lois $\mathcal{E}xp(a)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i) = e^{-a} \frac{a^n}{k!}$

↳ si $U_1, U_2, \dots$ iid de loi $Unif(]0,1[)$ la v.a. k définie par

$\prod_{i=1}^{k+1} U_i < e^{-a} \leq \prod_{i=1}^{k} U_i$ suit la pois (a).

- Simulation de Gaussiennes

Méthode de Box-Muller :

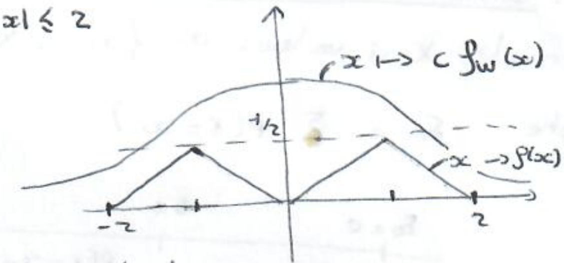
si U et V sont ind. de loi $Unif(]0,1[)$ alors

$$\left.\begin{aligned} X &= \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ \text{et } Y &= \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{aligned}\right\} \text{ ind. de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

- La méthode du rejet

Ex : $f(x) = \frac{1}{2}[1 - |1 - |x||] \, \mathbb{1}_{|x| \leq 2}$

- simulat° de la loi à densité



① On veut simuler une v.a. Y de densité f, où f est une fonction positive d'intégrale 1.

② on trouve une v.a. W qu'on sait simuler et dont la densité f_W satisfait $f \leq c f_W$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq c f_W(x)$) avec c = cste fixé.

③ On fait des tirages successifs de $(W_1, U_1), (W_2, U_2) \dots$ avec

$$\left.\begin{aligned} &W_i \text{ iid de densité } f_W \\ &U_i \text{ — de } Unif(]0,1[) \end{aligned}\right\} \quad W_i \perp U_i$$

④ on arrête les tirages au 1er indice où $c f_W(W_i) U_i \leq f(W_i)$

$T = \inf \{ i \in \mathbb{N}^*, \, c f_W(W_i) U_i \leq f(W_i) \}$

⑤ on prend comme valeur de Y le dernier W_i tiré : $Y(\omega) = W_i(\omega)$.

Cette v.a. $Y = W_T$ a pour densité f.

- Simulation de lois de Poisson

Proposition : le nbe de $\mathcal{E}xp(a)$ ind. qu'on peut additionner en restant sous le seuil 1 suit la loi Pois(a) : Si $X_1, \dots, X_n$ st ind de lois $\mathcal{E}xp(a)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) = e^{-a} \frac{a^n}{k!}$

↳ si $U_1, U_2, \dots$ iid de loi Unif $(]0,1[)$ la v.a. k définie par

$\prod_{i=1}^{k+1} U_i < e^{-a} \leq \prod_{i=1}^{k} U_i$ suit la pois (a).

- Simulation de Gaussiennes

Méthode de Box-Muller :

si U et V sont ind. de loi Unif $(]0,1[)$ alors

$X = \sqrt{-2\ln U} \cos(2\pi V)$

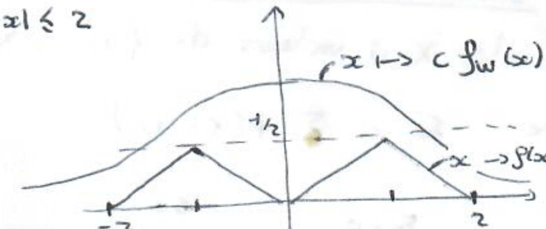
et $Y = \sqrt{-2\ln U} \sin(2\pi V)$

ind. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- La méthode du rejet

Ex : $f(x) = \frac{1}{2}\left[1 - |1 - |x||\right] \mathbb{1}_{|x| \leq 2}$

- simulat° de la loi à densité



① On veut simuler une v.a. Y de densité f, où f est une fonction positive d'intégrale 1.

② on trouve une v.a. W qu'on sait simuler et dont la densité f_W satisfait $f \leq c f_W$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq c f_W(x)$) avec c = cste fixé.

③ On fait des tirages successifs de $(W_1, U_1), (W_2, U_2) \dots$ avec

W_i iid de densité f_W
U_i —— de Unif $(]0,1[)$
$W_i \perp U_i$

④ on arrête les tirages au 1er indice où $c f_W(W_i) U_i \leq f(W_i)$

$T = \inf\{ i \in \mathbb{N}^*, c f_W(W_i) U_i \leq f(W_i) \}$

⑤ on prend comme valeur de Y le dernier W_i tiré : $Y(\omega) = W_i(\omega)$.

Cette v.a. $Y = W_T$ a pour densité f.