Quelques rappels mathématiques...

1. Optimisation

Théorème : *Soit une fonction $F(x): x \in \mathbb{R}^n \mapsto F(x) \in \mathbb{R}$ qui présente un maximum (minimum) en $\hat{x}$. Soit $G(y): y \in \mathbb{R} \mapsto G(y) \in \mathbb{R}$ une fonction continue monotone croissante. Alors la fonction $G(F(x)): x \in \mathbb{R}^n \mapsto G(F(x)) \in \mathbb{R}$ présente un maximum (minimum) en $\hat{x}$.*

Application : On peut toujours simplifier une fonction à optimiser en en la transformant par une fonction continue monotone croissante, sans changer l'optimum.

Exemples :

a) Fonction log-linéaire (Cobb-Douglas par exemple) : $Y = A \times X_1^{\alpha_1} \times X_2^{\alpha_2} \times \cdots \times X_n^{\alpha_n}$. On transforme par la fonction log : $Z = \log Y - \log A = \alpha_1 \log X_1 + \alpha_2 \log X_2 + \cdots + \alpha_n \log X_n$.

b) Fonction C.E.S. : $Y = \left(a_1 X_1^{\rho} + a_2 X2^{\rho} + \cdots + a_n X_n^{\rho}\right)^{1/\rho}$. On transforme par la fonction 'puissance ρ' et en divisant par ρ : $Z = Y^{\rho} / \rho = \rho^{-1}\left(a_1 X_1^{\rho} + a_2 X2^{\rho} + \cdots + a_n X_n^{\rho}\right)$.

Ces transformations permettent de simplifier les calculs.

2. Fonctions implicites

Théorème : *Soit la relation $F(x,y) = 0,\ x, y \in \mathbb{R}$, que l'on ne peut mettre sous la forme fonctionnelle $y = f(x)$. Si $\partial y / \partial x = -F_x' / F_y'$ est une fonction continue positive (négative) sur l'intervalle $[\underline{x}, \overline{x}]$, il existe une fonction monotone croissante (décroissante) qui relie x à y sur cet intervalle.*

Application : Souvent, un résultat se présente sous forme d'une relation entre plusieurs variables sans qu'une fonction simple soit explicitement définie. On peut néanmoins diagnostiquer une relation croissante (décroissante) entre 2 variables en différentiant la relation et en déterminant le signe de la dérivée partielle issue de cette différentiation.

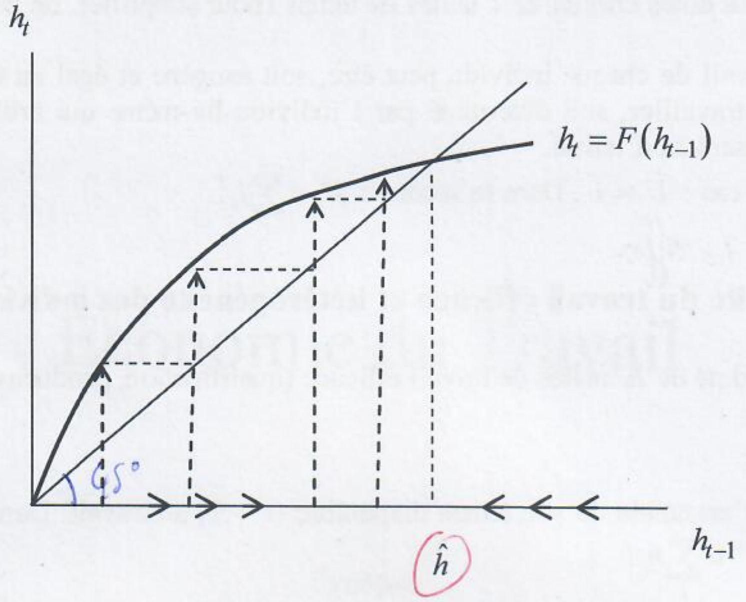
Exemple :

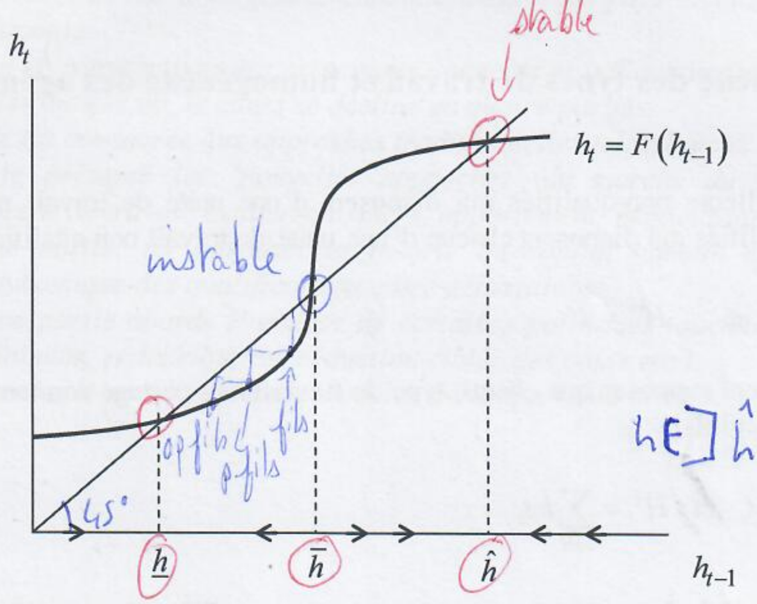
$$y^2 + 2y + x + \log x - 6 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2y dy + 2dy + dx + \frac{dx}{x} = 0$$

$$(2y+2)dy + \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1 + 1/x}{2(1+y)} < 0$$

3. Dynamiques intergénérationnelles et diagramme de phase

Dynamique intergénérationnelle : $h_t = F(h_{t-1})$.





$h \in [0, \hat{h}2[\rightarrow \hat{h}1$

$h \in]\hat{h}2, \infty[\rightarrow \hat{h}3$

« stratification sociale entre 2 groupes »

si ↑ niveau ed parents enfant ↗ mais moins rap

Comment modéliser le travail ?

1. Totale homogénéité du facteur travail

Il y a $\overline{L}$ individus dotés chacun de $\overline{l}$ unités de temps (pour simplifier, on pose $\overline{l} = 1$).

Le temps de travail de chaque individu peut être, soit exogène et égal au temps dont dispose l'individu pour travailler, soit déterminé par l'individu lui-même qui arbitre entre travail et loisir en maximisant sa d'utilité.
Dans le premier cas : $L^{+} = \overline{L}$. Dans le second : $L^{+} = \sum_i l_i^{+}$.

+ = offre

2. Homogénéité du travail efficace et hétérogénéité des individus

L'individu i est doté de h_i unités de travail efficace (qualification, productivité).

De plus, il peut :

1) Soit allouer l'ensemble de son temps disponible ($t = 1$) au travail. Dans ce cas, l'offre de travail est $H^{+} = \sum_i h_i$.
2) Soit disposer d'une unité de temps qu'il peut allouer au travail ou au loisir. Dans ce cas, l'offre de travail est $H^{+} = \sum_i h_i t_i$, où t_i est le temps qu'il alloue au travail.

3. Hétérogénéité des types de travail et homogénéité des agents dans chaque type

On a $\overline{L}$ travailleurs non-qualifiés qui disposent d'une unité de travail non qualifié, et $\overline{H}$ travailleurs qualifiés qui disposent chacun d'une unité de travail non qualifiés :

$$L^{+} = \overline{L} \quad \text{et} \qquad H^{+} = \overline{H}$$

On peut également supposer que chaque type de travailleurs partage son temps disponible ($t = 1$) entre travail et loisir :

$$L^{+} = \sum_{i \in L} t_i \quad \text{et} \quad H^{+} = \sum_{i \in H} h_i t_i$$

4. Hétérogénéité des agents en termes de qualification et de capacités non cognitives

L'individu i est doté de h_i unités de qualification et de a_i aptitudes non cognitives et son offre de travail efficace est : $l_i = l(h_i, a_i, t_i)$ où t_i est son temps de travail.